算数・数学・情報教育の創造

―「数理」の思想の教育の視点から―

本　間　俊　宏

概　要　数学，数理科学，情報科学，コンピュータ科学などの知見をもとに，算数・数学・情報教育の創造をめざして，「数理」の思想の教育の視点から，その教育内容を考察する。

検索語　数学教育　情報教育　算数・数学・情報教育　「数理」の思想の教育

I　研究の目的

子どもが算数・数学を学ぶ目的は，中学校・高等学校・大学の入学試験に必要であるとしても，極論であるとはいいきれない。しかし，子どもたちが，今，生きていることにも関わることも否定できない。子どもと算数・数学を対置するとき，どちらを主体にするかにより2通りの算数・数学教育観が考えられる。

①　子どもを主体とする

②　算数・数学を主体とする

①は子どもの生き様との関わりのなかで，数学を創り，身のまわりの事象の解明をすすめるという教育観に立つ。そこでは，教師は，数学をはじめ，数理科学，情報科学，コンピュータ科学などの知見をもとに，理論をつくり，その理論をもとに問題を解決するという力量が要請される。

②は既存の算数・数学を子どもに分かりやすく教えるという教育観に立つ。そこでは，ひたすら指導法を研究する力量が要請される。

情報社会では，コンピュータをツールとして，インターネット等から情報を自由に入手できる。子どもにとって，学校教育だけが知識源ではなくなった。むしろ，学校教育では，生涯学習の視点から，情報の価値判断の訓練が望まれる。そのような場として「総合的な学習の時間」が設定されたといえる。なかでも，数学は，基礎科学として，論理的思考の訓練の場としての役割が期待される。

数学をはじめ，数理科学，情報科学，コンピュータ科学などの概念・定義・定理・公式や問題の解法などの背景にある「数理」の思想にまで踏み込んだ算数・数学・情報教育が必要であると考える。

本論文では，算数・数学・情報教育の創造をめざして，その教育内容を「数理」の思想の教育の視点から考察する。

II　これまでの研究経過

私は，本間俊宏（1995）において，数学の概念や定理の背景にある思想にまで踏み込んだ数学教育の必要を提唱した。これを数学教育の思想と呼んだ。

一方，数学教育の研究に思想性が欠如しているという指摘がなされることがある。これは，学習指導要領改訂の背景にある教育思潮を指すことが多くみられる。

私の趣旨は，数学教育に数学の概念や定理の背景にある思想を教育内容として取り入れることである。数学とその周辺の科学，すなわち，数理科学といったものを数学教育の内容とするという意味で，本間俊宏（1997）では数学教育の思想とよぶよりも数理思想の教育とよぶほうがよりふさわしいと考えるに至った。

しかし，塩野直道（1970）が，科学的精神の涵

本学教授

養との対比で数理思想を提唱している。本間俊宏（1999）では塩野のいう数理思想との混同をさけて，数理思想の教育とよぶよりも，その年代の子どもに合った数学とその周辺の科学を「数学」と規定し，数学の思想の教育とよぶことにした。

しかし，本間俊宏（2002）では，数学に限定せず，数学の周辺にある数理科学，情報科学，コンピュータ科学などの知見を取り入れることから，「数学」よりも「数理」がふさわしいと考え，「数理」の思想の教育とよぶことにした。

先ず，従来の算数・数学から，

① 整数の加法の結合法則
② 整数の乗法・除法
③ 負の数
④ 連立方程式
⑤ 集合
⑥ 微積分
⑦ 座標と次元
⑧ 不確定事象

などにある「数理」の思想について考察した。

次に，コンピュータの発達と関連して，1960年代頃から数理科学の理論として発展してきた次の諸理論には，新しい「数理」の思想を形成するものがあるとして，

⑨ ファジイ理論
⑩ フラクタル理論
⑪ グラフ理論

について，小・中・高・大で実践的に試みた。

さらに，コンピュータ科学の知見から，

⑫ アルゴリズム
⑬ デッドロックの数理
⑭ 時間逆行の数理
⑮ 迷路
⑯ ボロノイ図（計算幾何学）

など，子どもは潜在的な「数理」として捉えていないか，以下，実践的に試みた。

「数理」の思想について考察例を述べる。

1）①整数の加法の結合法則について，次のような「数理」の思想がある。

① 1度には2数の計算しかできないこと。
② 3数の計算は，はじめの2数を計算するか，あとの2数を計算するか，いずれの計算も答えが一緒になること。
③ その結果，計算は計算のしやすいまとめ方でよいこと。

③は結合の自由度を保障する。計算のしやすさにまで一歩進んでこそ，結合法則の本質がつかめることになる。

2）②整数の乗法・除法について，

かけ算の導入では，いくつかの数を足すとき，2+3+2+1は足し算をするが，2+2+2+2のときは，足し算でも良いが，同じ数2を4回足すのだから，2×4とかいて，これをかけ算ということにする。すなわち，次のようにかけ算を導入する。

（同じ数）×（いくつ分）=（全部の数）

そして，かけ算の答えは，かけ算九九により求める。

ここには，次のような「数理」の思想がある。

① 同じ数をいくつか足すときは，かけ算によること。
② それを求めるには，かけ算九九を用いること。

このように，かけ算の成立する場面とその演算方法とは分けて考える。そして，かけ算の適用は，「同じ数」が「いくつ分」あるときになる。

小学校3年生のわり算について，12個のクッキーを本人，兄，妹の3人で分けるとき，本人4個，兄5個，妹3個と分けることもある。ここでは，3人が等しくなるように分けるとすると，12÷3とかいて，これをわり算ということにする。また，12個のクッキーを4個ずつ分けると何人に分けられるかというときも，12÷4とする。

はじめは，12個のクッキーを1個ずつ3人に配る。次は，2個ずつ，3個ずつ配るとしていき，ついには，効率よく一度に配る個数を考える。そして，同じ個数ずつ人数分配ったことより，元の個数をかけ算で求める。このようにして，答えは，かけ算九九により求めることになる。

ここには，次のような「数理」の思想がある。

① 同じ数になるように等分するときは，わり

算によること。(等分除)

② 同じ数ずつに分けるといく組になるかを求めるときは，わり算になること。(包含除)

③ これら2種類のわり算は，かけ算の要素「同じ数」と「いくつ分」によること。

④ それらを求めるには，かけ算九九を用いること。

このように，わり算には等分除と包含除があり，その答はかけ算により求める。

わり算は，効率よく一度に分ける方法を求めるというところに「数理」の思想があり，かけ算がバックにあるということである。

3）③負の数について，

中学校1年生の負の数について，その適用場面を考えてみる。

負の数は，3，2，1，0，そのいきおいで，−1，−2といった導入よりも，増減のように，正反の2方向でその方向量をあらわす数として導入するのがよい。

すると，東へ200m進むを200とあらわすと，西へ300m進むは−300とあらわすことができる。

ここには，次のような「数理」の思想がある。

① 負の数は正反の2方向をもつ方向量をあらわす数であること。

② 増減，高低のように自然に定まる方向量もあれば，東西のように人為的に定まる方向量もあること。

4) ④連立方程式について，

中学校2年生の連立二元一次方程式について，その適用場面を考えてみる。

問題 あるコンサートの入場料は，大人3000円，子ども1500円であった。大人と子ども合わせての入場者数は500人で，入場料の合計は，1155000円であった。 大人と子どもの人数を求めよ。

大人 x 人，子ども y 人として，次のような連立方程式を考える。

$$\begin{cases} x + y = 500 & ① \\ 3000x + 1500y = 1155000 & ② \end{cases}$$

①は人数についての式で，②は料金についての式である。人数と料金の違いがあるのに，これらを連立させるのはどうしてかという疑問をもつ子どもがいた。ここでは，バックにある量（人数と料金）から離れて，x と y という数の間の関係として捉える必要がある。

ここには，次のような「数理」の思想がある。

① 求める数について量をバックにした連立方程式を考えること。

② バックの量から離れて，求める数の間の関係をあらわす式として捉えること。

このように，連立方程式は，バックの量からみると異質であるが，数の間の関係をあらわす式としてみると同質であること。同質であるから，連立して計算することができる。

5）⑤集合について，

集合では範囲が確定しないとして「中年の集合」を排除するが，その所属度を付加することで，⑨ファジイ理論では集合（ファジイ集合という）として論じる。

6）⑥微積分について，

微積分には「事象の変化は局所的には1次式で近似する。」という「数理」の思想がある。しかし，⑩フラクタル理論は，「どこまでも自己同型という事象」を扱う。微積分では論じられない事象が存在する。

7）「数理」の思想の教育と実在の問題解決の手法であるモデリングとを統合することにより，子どもの生きる力をつくりだすことが可能と考える。

私のモデリングは，既成の数学にとらわれず，現在体系化されつつあるホットな理論も射程に入れて，問題がよりうまく解決することをとおして，未完成な理論をうまく発展させることもありうるということである。

私のモデリングの実践的な研究は，自動車工学からの知見による

⑰ 自動車の内輪差・外輪差

の教材を開発し，中学校で実践したのがはじまりである。左折時の左巻き込み現象をパソコンでシミュレーションした。

また，経済学のシステムダイナミクス理論の知見から，

⑱　自転車の駅前放置問題

の教材化を試みた。

とくに，⑪グラフ理論のなかには，子どもが学習するのに適したマイクロワールドな数学がある。

交差点の信号の種類は，点と線でグラフ化することで，事象の構造化ができた。

⑯ボロノイ図は，大阪市の緊急避難場所の区域設定について，教材開発し，高校生に実験した。この理論は，東京大学において空間情報科学として構築されつつある。

以上のように，従来の算数・数学の教材から，整数の加法の結合法則，整数の乗法・除法，負の数，連立方程式，集合，微積分，座標と次元，不確定事象などにある「数理」の思想について考察した。

このように，数学の概念や定理が形成される過程を考察することにより，何が抽象され，また，何が捨象されたかが明確になる。これは，子どもが先入観として，数学の概念や定理は完成された，疑う余地のないものであるということを排除することになる。そこには新しい発想を受け入れる余地が生まれる可能性があることを示唆してくれる。そのような例を次に述べる。

コンピュータの発達と関連して，1960年代頃から数理科学の理論として発展してきた諸理論には，新しい「数理」の思想を形成するものがある。

次に，新しい「数理」の思想について考察する。

8）⑪グラフ理論について，

a, b, c, d, eの5チームがリーグ戦をする。試合の組をすべて書き出せ。これは，小学校6年生に，通常は次のような樹形図により指導している。（図1）

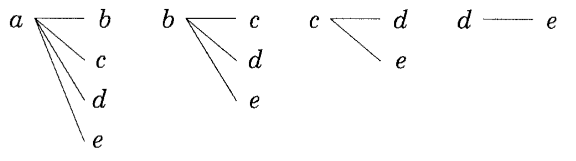

図1

これをグラフ化する。グラフ理論では完全グラフに相当する。（図2）

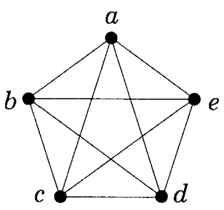

図2

本間俊宏（1999）では，大学3年次ゼミ生に次の問題を解答させた。これは，1998年の名古屋市教員採用試験小学校全科の問題であり，学生にわかりやすくするために本間が改作した。

問題　親子2人で1組とする。3組が初対面で互いに握手を交わした。

　このうちの1人a君がほかの5人に対して何人と握手を交わしたかを聞いたところ，皆，それぞれ異なる答えをした。そのうち，1人だけ誰とも握手しない人がいた。

a君の親は何人と握手したか。

　ただし，握手は次のように行うものとする。

①自分自身とは握手しない。

②自分の親または子とは握手しない。

③同じ人とはふたたび握手しない。

ここで，6人を点で表し，それらの点を線で結ぶ。線で結ぶことは握手をしたことになる。これが，グラフである。（図3）

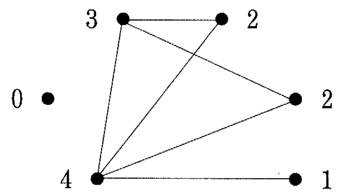

図3

点●のそばの数値は握手の回数，すなわち，辺の数である。これをグラフ理論ではその点の次数という。線で結ばれていない点同士は親子と疑ってみる。

ゼミ生は，問題の事象をグラフ化することで，その構造がビジュアルに表現でき，問題解決の見通しがたてやすくなったと考えた。

ここには，次のような「数理」の思想がある。

① グラフ化することで，事象の構造の把握が視覚的になること。

ここには，文字情報から画像情報への転換がみられる。構造をグラフとして把握することが重要になってきた。ここに「数理」の思想があらわれている。

9）⑨ファジィ理論と⑧不確定事象について，

不確定な事象，すなわち，「あいまいさ」には，大量観察によって規則性が見いだされる蓋然的な事象と定義や解釈のあいまいさによる事象がある。

前者は確率統計として数学教育に取り入れられてきた。しかし，後者はファジィ理論として，近年，とくに注目されてきた。

ファジィ理論は，地下鉄の運転制御，洗濯機やルームエアコンの自動制御など身近なところで応用されており，「ファジイ」は「あいまい」という意味で日常会話にも登場する。従って，子どもたちにもなじみのある言葉である。しかし，子どもたちはその本質を理解しているといえるだろうか。

本間俊宏・寺田幹治・金谷博史（1994）は中・高校生の調査から，ファジィ理論の学校数学への導入の可能性を述べている。

①「ファジィ」ということばについて

全員がテレビのCMで知っていると答え，その意味は，「あいまい」といい，掃除機，クーラー，洗濯機などに利用されていると答えた。

②「ファジィ利用の効果」について

「あいまい」からくることばのひびきとして，従来の機械にかわって人間らしい判断，すなわち，融通が利くだろうという期待をよせている。しかし，低学年には，わからないという回答も多い。

③所属度について

実例は0～1までの数値を示したが，1.3として1をこえる子どもや，大多数の子どもが0～1へ所属度を決めるときに，逆に1～0へとする子どもがいた。

その後の調査では，所属度の実例を与えずに生の認識をさぐったところ，子どもは，A，B，C；60，80，90；4～7，8～10，1～3などと表現した。「あいまいさ」の量化に多様な考えがあることがわかる。また，所属度の決め方には客観性を要請する意見が半数あった。

④ファジィ集合の演算（または，かつ）について

「背の高い力士の集まり」「太っている力士の集まり」に，各力士の所属度を付加することでファジィ集合を構成した。次に，「背が高いかまたは太っている力士の集まり」「背が高くかつ太っている力士の集まり」について，各力士の所属度を決めさせたが誰もできなかった。そこで，通常の集合の和集合，共通集合を指導し，再び，「または」について，「要素をたくさんとるようにするにはどうすべきか，max，minをとればどうなるか」と示唆したところ，「maxをとればよい」と答えた。さらに，「かつ」について，「要素を制限するようにするにはどうすべきか」と示唆したところ，「minをとればよい」と答えた。これらのことから，max，minによるファジィ集合の演算は理解されることがわかる。

ここには，次のような「数理」の思想がある。

①「あいまいさ」のうち，定義や解釈のあいまいさによる事象について，所属度を与えることによって数学の対象とする。

②数学でいう集合（ファジィ理論では，クリスプ集合という）が範囲の確定した集まりを議論の対象とするために，例えば，中年の集まりは集合の対象にならなかった。

このように，中年ということばの解釈のあいまいさのために集合，すなわち，数学の対象にならなかったことを数学の対象とするところに「数理」の思想があらわれている。

10）⑩フラクタル理論と⑦座標と次元について，

微積分の思想，すなわち，ニュートンの思想は変化を微細化していくと，究極的には1次式近似，すなわち，直線で近似できるということである。しかし，究極においても自己相似を崩さない事象が存在する。これは脱ニュートンの思想である。また，2次元，3次元といった整数次元では表現できない事象が存在する。これが有理数次元，す

なわち，フラクタル次元である。これは，次元の概念の拡張である。このような事象に対処するのがフラクタル理論である。

点を表すのにいくつかの実数の組を用い，実数がいくつあるかで，その個数を次元とよんでいた。しかし，ある正方形を埋めつくすような曲線（ペアノ曲線）が存在し，その次元を実数の個数で表すと，曲線だから1次元，正方形になるから2次元では，どの次元か判断ができない。さらに，自己相似の縮小写像を繰り返すと平面が埋まっていくようにみえる。これらの次元をどうみるか。

そこで，発想をかえて，曲線ならばその曲線を覆いつくすような線分の和がつくられる。閉曲線の内部はその図形を覆いつくすような正方形の和がつくれる。同様に，ある図形を覆いつくすような図形の和が存在して，その図形を d^k と表すとき k の値を次元とする。図形を測るのにどのような尺度が必要かという議論に教育的な意義を認める。

自己相似集合を複素平面上で考え，その点（要素）を複素数 z で表す。縮小率 k の縮小写像は kz で表され，実軸に関する対称移動の写像は $\bar{z}$ で表され，原点Oを中心とする θ の回転移動の写像は $ze^{\theta i}$ で表される。これらの合成写像によって自己相似集合が構成される。

これをパソコンの画面にかくことによってフラクタル図形として表現される。このように複素平面に関する理論を統合的に扱うところに教育的な意義がある。

ここには，次のような「数理」の思想がある。

① 自己相似な図形をコンピュータ・グラフィックスとして表現する。

② 再帰的処理により，フラクタルの特性である自己相似な縮小写像を扱う。

このように，どこまでいっても自己相似性はくずれないところに，究極では1次式で近似できることとは異なった現象があるところに「数理」の思想があらわれている。

さらに，徳田雄洋（1990）からヒントを得たコンピュータ科学の知見からの例をあげる。

11）⑫アルゴリズムについて，

柳本朋子（1994）は，小学校5年生に a, b, c, d, e, f, g, h の8人の背比べを指導したことを述べている。

この順位付けを手順化する。これがアルゴリズムである。子どもは，図に表してプロセスを楽しむ。子どもは，実際に8人の子どもを見れば，簡単に背比べができる。しかし，比べる人数が増えたり，コンピュータでしようとすると，2人の子どもの背比べしかできないことに気づく。そこで，子どももコンピュータと同じ条件で背比べを考えることにした。子どもは，勝ち抜きを考えたり，トーナメントを考えたり，総当たりを考えたりして，それらを図や線で表現した。

ここには，次のような「数理」の思想がある。

① 背比べのアルゴリズムを子ども自身の手で創出しようとする。

② 背比べを完成するプロセスは効率を度外視すればいろいろあり，その表現も記号や図を用いていろいろあることがわかる。

③ 結果にだけ着目する従来の学習とは異なる側面を提供する。

このようなアルゴリズムの授業の後で文章題を解かせたところ，これまでは答えしか出さなかった子どもたちが，記号や図や線を用いて解答のプロセスを表現した。これは，子どもたちが，アルゴリズムの学習（背比べ）により，解答のプロセスに関心を示し，その方法が会得できたことによるといえよう。

12）⑬デッドロックの数理について，

コンピュータでは1つのリソースに2つのタスクが要求されると動きがとれなくなることがある。これがデッドロック現象である。本間俊宏・大西慶一（1997）では，これを身の回りの例として書き出し，その解決策を小学校5・6年生に考えさせた。デッドロック現象を構造化できるか，どんな具体例をとりあげるか，その子どものもつ問題意識まで迫ることができた。

コンピュータ科学におけるデッドロックの現象は，1つの資源（リソース）を2つのタスクが要

請するときに起こる現象で，このままではどちらのタスクも不完全な状態に陥ってしまう。オペレーティングシステムではこのような現象が起こらないようにコントロールする。

子どもたちに「デッドロック＝行きづまり現象」とし，具体例をあげて説明した後で，子どもたちの体験にもとづく例を文章とその内容を絵や図に表現させ，その解決策も示させた。デッドロックの数理としては，つぎの3つのタイプがある。

Ⅰ型　1つのことが単に行き詰まる

Ⅱ型　2つのことが対立して動きがとれなくなる

Ⅲ型　3つ以上のことがぐるぐる循環する

形式論理ではまかないきれないひとつの論理である。コンピュータのオペレーティングシステムでは，同時に2つのタスクが1つの資源を要求したときは，停止した状態になるので，リセットせざるをえない。しかし，人間はそのようなとき，その状態から脱出する方法を模索する。むしろ，ご破算にして再スタートする，ということができない場合も起こりうる。

ここには，次のような「数理」の思想がある。

①　デッドロックをどのように解消するかがキーポイントになる。

②　コンピュータではできないが，人間の知恵ならばうまくクリアできる。

このように，子どもたちは行き詰まり現象を上述の3つのタイプに分けて意識しているわけではない。そこで，どのようなときに行き詰まりが起こるかということのメカニックを意図的に考えさせる必要がある。

13）⑭時間逆行の数理と⑮迷路について，

コンピュータでは，行き詰まったとき，そのことが生起する直前にまで戻ってやり直すというオペレーティングシステムをもっている。これが時間逆行の数理である。これを迷路解きに適用し，小学校6年生に調査した。1回間違っても最小の時間で解く子どもや1回も間違わないが少し時間のかかった子どもがあった。

ここには，次のような「数理」の思想がある。

①　違っても直ぐに訂正すること。

②　間違うことを恐れないこと。

正確を期すために，考えすぎて失敗するよりも，行動を起こし，そして失敗すれば直ぐに訂正する。訂正のためにどこまで戻るか。

Ⅲ　これからの研究の方向

私たちは，マスメディアやインターネットをとおして，その他いろいろな方法で，いつでも，どこでも，誰でも，情報を入手することができる情報社会に突入した。そこでは，誰よりも，どこよりも早く情報を入手し，分析し，意志決定することが他を制することになる。すなわち，情報が社会の基盤となってきた。したがって，情報社会に生きる子どもたちには，ある問題意識のもとに情報を収集し，選択し，分析し，加工し，そして発信する能力が要請される。もはや，計算が中心で，公式にあてはめて問題を解くという知識の注入だけの数学教育では，時代の変化に対応しきれなくなってきた。そのためには，公式・定理・定義のよりどころにまでもどって人間の叡知を学び取ることが必要である。これらのことより，数学，数理科学，情報科学，コンピュータ科学などの知見をもとに，これらの概念・定義・定理・公式や問題の解法などの背景にある「数理」の思想にまで踏み込んだ算数・数学・情報教育が必要であると考える。さらに，「数理」の思想の教育と実在の問題解決の手法であるモデリングとを統合することにより，子どもの生きる力をつくりだすことが可能と考える。

数学，数理科学，情報科学，コンピュータ科学などの知見をもとに，これらの概念・定義・定理・公式や問題の解法などの背景にある思想を，本間俊宏（1995）では数学教育の思想といい，本間俊宏（1998）では数理思想の教育といい，本間俊宏（1999）では数学の思想の教育といったが，本間俊宏（2002）では「数理」の思想の教育ということにした。

小・中・高の「総合的な学習の時間」や高等学校では教科「情報」がはじまる。その時期に，私

問題意識 → 収集・選択 → 分析・加工 → 発信・評価 → 蓄積・破棄

問題意識	収集・選択	分析・加工	発信・評価	蓄積・破棄
	情報検索	統計解析	プレゼンテーション	データベース

図4

は算数，数学，情報のトータル的な教育の創造を試みることにした。

私は情報の処理について次のシステム化を提唱してきた。（図4）

問題意識をもって事象の解明をすすめる。そのなかでモデルをつくり，数学理論を構築する。コンピュータはツールとして活用する。

問題意識をもつことは，単なる調べ学習や課題解決学習ではない。子どもたちが主体的に問題意識をもつことは自己の生涯に影響を及ぼすことになる。

その問題意識のもとで，情報の収集・選択をすすめる。このとき，インターネットなどの情報検索がある。

次に，その問題意識のもとでの分析・加工では表・グラフ・統計量・予測などの統計解析が用いられる。

その問題意識のもとに，問題点や解決策を発信する手段としてWeb上に公開することもできる。プレゼンテーションの扱いが問題になる。

そして，その問題意識のもとに重要な情報はデータベース化して蓄積する。

私は，算数・数学教育に対して，数学のみならず数理科学，情報科学，コンピュータ科学などの諸科学，社会，子ども，技術，文化からの突き上げを意識する。ここに至り，数学教育から算数・数学・情報教育の創造へ，そして，数学の思想の教育から，進化して「数理」の思想の教育を提唱する。

Ⅳ　算数・数学・情報教育の創造へ向けて

高等学校の教科「情報」では，次の3つの柱があるとされる。

A　情報の活用能力

B　情報の科学的理解

C　情報社会への参画

このうち，数学に関係のあるのはBである。しかし，私の提唱する「数理」の思想は，Bに限定するものではない。

コンピュータの演算回路は2進法と記号論理で論じるが，ここにのみ数学が関わっているとするのは視野が狭いといわざるをえない。情報に関わる広い分野で広い意味で「数理」が潜んでいるといえる。Ⅱで述べた，⑬デッドロックの数理，⑭時間逆行の数理はコンピュータのオペレーティングシステムに関わる「数理」である。このような例を徳田雄洋（1997）から考察する。

1）コンピュータのしくみは，ハードウェアとしては，

① 中央処理装置

② 入力装置

③ 出力装置

④ 補助記憶装置

①はマイクロプロセッサという演算装置とメモリという主記憶装置があり，これらを統御する制御装置からなる。

②はキーボード，マウス

③はディスプレイ，プリンタ

④はディスク類

制御装置はマイクロチップ化することで中央処理装置で制御する中央管理型から各装置で制御する分散管理型に進化している。

ソフトウェアとしては，

① オペレーティングシステム

② シェルプログラム

③ 応用プログラム

と階層構造になっている。

①はハードウェアを直接操作し，0と1の世界である。

②は人間が①を操作する

③はワープロ，表計算，データベース，インター

ネットなど

これは，装置やプログラムが何であれ対応できるための分業システムになっている。

2）データの送受信において，公開鍵と秘密鍵がある。

送信者Aが自分の秘密鍵でデータを暗号化して送信する。受信者BはAの公開鍵を用いて受信したデータを復号化する。これでAの発信したデータを確実にBが受信できる。この場合，Aの公開鍵をもつ者は誰でも受信できる。

また，送信者Aが受信者Bの公開鍵でデータを暗号化して送信する。受信者Bは自分の秘密鍵を用いて受信したデータを復号化する。これでAの発信したデータはBだけ確実に受信できる。この場合，Bの公開鍵をもつ者は誰でも送信できるが，受信できるのは受信側の秘密鍵をもつBだけである。

3）デッドロック

タスクに資源が部分的に貸し出され，タスクの完了まで資源を返却しないため，要求と待ちの関係が行き詰まる。

4）ロックアウト

スケジュールの管理が公平性を保証できないため，タスクがいつまでも待たされる。

5）データの送受信時の階層的分業

コンピュータネットワークでデータを送受信するとき，プロトコルなどいくつかの手続きがあり，システム化されている。これらの中にも，広い意味で「数理」が潜んでいる。

OSI（Open System Interconnection）参照モデルではプロトコルがつぎのような7つの階層に定められている。

第7層	アプリケーション層
第6層	プレゼンテーション層
第5層	セッション層
第4層	トランスポート層
第3層	ネットワーク層
第2層	データリンク層
第1層	物理層

最上位の第7層は，アプリケーションプロセスが通信に必要とする機能である。HTTP（Hyper Text Transfer Protocol）はこれにあたる。第6層は，データの表現形式を決める。第5層は，データのやりとりの手順を定める。第4層は，コンピュータ間のデータ伝送の機能を定める。TCP（Transmission Control Protocol）はこれにあたる。第3層は，データ伝送経路を決め，パケットを配送する機能である。IP（Internet Protocol）がこれである。第2層は，隣接するネットワークノード間でのデータ伝送機能である。最下位の第1層は，物理的表現等を定める機能である。

実際には，第1，2層はEthernet，第3層はIP，第4層はTCP，第5，6，7層はWebサーバやメール・サーバなどのアプリケーションの4層で構成される。

すなわち，次のような階層がある。

①応用ソフトウェア

②TCP/IPソフトウェア

③ppp接続ソフトウェア

④モデム

⑤電話回線

応用ソフトウェアは，1つの情報を遠くのIPアドレスのコンピュータ上の応用ソフトウェアまで送信することをTCP/IPソフトウェアに依頼する。

TCP/IPソフトウェアのうちのTCPソフトウェアは，先方のIPアドレスあてにいくつかのパケットに分割し，TCP/IPソフトウェアのうちのIPソフトウェアに渡す。

IPソフトウェアは，各IPパケットを隣接のコンピュータにバケツリレーで送受信する。各IPパケットはいくつかのフレームに分解し，ppp（point-to-point protocol）接続ソフトウェアに渡す。

フレームは正しく送信されたか確認するためのパケットより小さい1と0の集まりである。ppp接続ソフトウェアは隣接のコンピュータ間の各フレーム送受信が正しいかどうかを確認する。

ppp 接続ソフトウェアは1と0の送受信をモデムに依頼する。

モデムは電話回線で直接接続するコンピュータのモデムと電気信号で送受信する。

各段階で互いに送受信するので，1つの段階で変更があっても他の段階は従来通りのままでよい。

以上のようなデータ伝送のシステムの中にも，「数理」の思想があると考えたい。このように，1つのコンピュータから目的のコンピュータへ識別されてデータが伝送されるには，いくつかの層に分けてデータを伝送するという方法は，数学ともコンピュータ科学とも区別できない，むしろ，「数理」とトータルで考えたい。

6）送受信の最短経路

下図のようなネットワークがあるとき，AからGまでの最短経路を求めたい。辺上の数値は距離を表すとする。(図5)

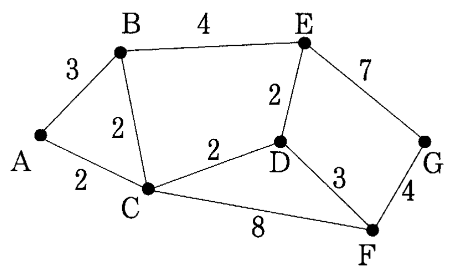

図5

コンピュータAからコンピュータGにデータを送信するとき，隣接のコンピュータをパケットがつぎつぎ伝わって流れていく。

AからBまでは距離は3（A→B：3と略記)，A→C：2だから距離の短い方を先に調べることにする。以下，それまでの距離が短い方を先に調べる。同じ点は通らないことにする。

A→C：2
　AC→D：4
　　ACD→F→$\boxed{G}$：$\boxed{11}$
　　ACD→E→$\boxed{G}$：$\boxed{13}$
　AC→B：4
　　ACB→E：8
　　　ACBE→$\boxed{G}$：$\boxed{15}$
　　　ACBE→D→F→$\boxed{G}$：$\boxed{17}$
　AC→F：10
　　ACF→$\boxed{G}$：$\boxed{14}$
　　ACF→D→E→$\boxed{G}$：$\boxed{22}$
A→B：3
　AB→C：5
　　ABC→D：7
　　　ABCD→F→$\boxed{G}$：$\boxed{14}$
　　　ABCD→E→$\boxed{G}$：$\boxed{16}$
　　ABC→F：13
　　　ABCF→$\boxed{G}$：$\boxed{17}$
　　　ABCF→D→E→$\boxed{G}$：$\boxed{25}$
　AB→E：7
　　ABE→$\boxed{G}$：$\boxed{14}$
　　ABE→D：9
　　　ABED→F→$\boxed{G}$：$\boxed{16}$
　　　ABED→C→F→$\boxed{G}$：$\boxed{23}$

最短経路はA→C→D→F→Gで11，最長経路はA→B→C→F→D→E→Gで25となる。

7）最小費用の連絡網

6)の図で辺上の数値を2点間の輸送費用とみればよい。(図5)

8）不正確な伝達

伝達したことが正しく伝わったかを多数決で決める。同数のときは正しく伝わっていないとする。

①3人は正直で1人はうそつきとする。

AがB，C，Dに直接伝達するとする。

Aが正直ならば，B，C，Dに正しく伝達するから，B，C，Dのうち2人は正直で1人はうそつきだから2対1で正しく伝達されたと判定できる。

Aがうそつきならば，Bにはうそを伝え，C，Dには正しく伝えるとする。B，C，DがAの伝達を互いに伝え合うことで各自の伝達の正否を判定する。B，C，Dの3人とも正直だから，BはC，Dにうその伝達をし，CとDは他の2人に正しく伝達する。

Bは，Aよりうその伝達を受け，CとDより正しい伝達を受けたことより，正しい伝達を受けたと判定する。

Cは，Bよりうその伝達を受け，AとDより正しい伝達を受けたことより，正しい伝達を受けたと判定する。

Dは，Bよりうその伝達を受け，AとCより正しい伝達を受けたことより，正しい伝達を受けたと判定する。

B, C, Dは正しく伝達されたので，Aは正しく伝達したと判定する。

②正直者5人とうそつき2人の場合を考察する。

Aがうそつきで，B, C, Dにはうその伝達をし，E, F, Gには正しい伝達をしたとする。

B, C, D, E, F, GがAの伝達を互いに伝え合うことで各自の伝達の正否を判定する。

BがうそつきでC, Dにはうその伝達をし，E, F, Gには正しい伝達をしたとする。

Bの伝達を判定するために，C, D, E, F, GがBの伝達を互いに伝え合うことで各自の伝達の正否を判定する。それらの多数決でBの伝達を判定する。

次に，Cの伝達を判定するために，B, D, E, F, GがCの伝達を互いに伝え合うことで各自の伝達の正否を判定する。それらの多数決でCの伝達を判定する。

同様に，D, E, F, Gの伝達を判定する。

最後に，B, C, D, E, F, Gの伝達の多数決でAの伝達を判定する。

9）推論

命題の真偽が分かればコンピュータで合成命題の真偽が判定でき，推論が可能になる。数学教育の現代化で話題になった記号論理が，コンピュータ科学との関連において再び扱うことになる。

本間俊宏（1990）から記号論理について扱う内容を考察する。

① 命題

(1) 命題の否定の真偽

P	Pでない
T	F
F	T

(2) 合接命題の真偽

P	Q	PかつQ
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

(3) 離接命題の真偽

P	Q	PまたはQ
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

(4) 条件文の真偽

P	Q	PならばQ
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

(5) 原・逆・裏・対偶命題の真偽

P	Q	P→Q	Q→P	$\overline{\mathrm{P}}$	$\overline{\mathrm{Q}}$	$\overline{\mathrm{P}}\to\overline{\mathrm{Q}}$	$\overline{\mathrm{Q}}\to\overline{\mathrm{P}}$
T	T	T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T

② 命題における有効な推論形式

(1) $p \to q$

$\underline{p\quad\quad}$

$\therefore\ q$

(2) p または q

$\underline{p}$ でない

$\therefore q$

(3) $p \to q$

$\underline{q}$ でない

$\therefore p$ でない

(4) $\underline{p \to q}$

$\therefore \overline{q} \to \overline{p}$

(5) $p \to q$

$\underline{\quad q \to r \quad}$

$\therefore p \to r$

③ 条件

条件 $p(x)$ とその真理集合 P

(1) 条件 $p(x)$ の否定とその真理集合

(2) 合接条件「$p(x)$ かつ $q(x)$」とその真理集合

(3) 離接条件「$p(x)$ または $q(x)$」とその真理集合

(4) 条件文「$p(x)$ ならば $q(x)$」とその真理集合

(5) 条件文「$p(x)$ ならば $q(x)$」の否定とその真理集合

④ 条件における有効な推論形式

(1) $p(x) \to q(x)$

$\underline{\quad p(x) \quad}$

$\therefore \quad q(x)$

(2) $p(x)$ または $q(x)$

$\underline{\quad p(x)$ でない$\quad}$

$\therefore \quad q(x)$

(3) $p(x) \to q(x)$

$\underline{\quad q(x)$ でない$}$

$\therefore$ $p(x)$ でない

(4) $\underline{p(x) \to q(x)}$

$\therefore \overline{q}(x) \to \overline{p}(x)$

(5) $p(x) \to q(x)$

$\underline{\quad q(x) \to r(x)}$

$\therefore p(x) \to r(x)$

⑤ 限定命題

(1) 全称命題「すべての x について $p(x)$」の真偽

(2) 存在命題「ある x について $p(x)$」の真偽

(3) 全称命題「すべての x について $p(x)$」の否定の真偽

(4) 存在命題「ある x について $p(x)$」の否定の真偽

10) プログラミング

第1世代のプログラミングでは，BASIC にみられるように GO TO 文が多用されたため，いわゆる，論理的スパゲッティの弊害があった。
N88BASIC が相当する。

第2世代の構造化プログラミングは，順次構造，選択構造，反復構造からなり，行番号や GO TO 文を用いなくなった。
Quick BASIC が相当する。

第3世代のオブジェクト指向プログラミングでは，事象を目的化し，対象化するところまでが人間であり，対象化したオブジェクトには属性と方法がコンピュータによって準備されている。
Visual BASIC はその方向にあるが，本格的には JAVA が相当する。

第4世代といわれるエージェント指向プログラミングは，事象を目的化するところまでが人間で，それから先はコンピュータが判断するという，人間に近づいた。
Flage が開発中である。

11) アルゴリズム

① 数学的帰納法

② 帰納的な考え

などを扱う。

①では，自然数 n についての命題 $P(n)$ において，

Ⅰ　$n=1$ のとき命題 $P(1)$ は成り立つ

Ⅱ　$n=k$ のとき命題 $P(k)$ は成り立つと仮定して，

$n=k+1$ のとき命題 $P(k+1)$ は成り立つ

Ⅱ′　$n \leqq k$ であるすべての n について命題 $P(n)$ は成り立つと仮定して，

$n=k+1$ のとき命題 $P(k+1)$ は成り立つ

ⅠとⅡあるいはⅠとⅡ′が成立すれば，すべての自然数 n について命題 $P(n)$ は成り立つ。
②では，初めの数項が成り立てば，項の間の関係式によって，すべての項が求められる。例としては，数列の漸化式がある。

Ⅴ　今後の課題

Ⅲ.Ⅳで述べた「数理」の思想を算数・数学・情報教育としてどのようにカリキュラム化するかが課題となってくる。

例えば，Ⅳで述べた「データの送受信時の階層的分業化」というテーマを算数・数学教育か，情

報教育かと分けるのではなく統合的に算数・数学・情報教育としてを扱うようなカリキュラム化を試みたい。その際，アルゴリズム，グラフ理論，ファジィ理論，フラクタル理論，情報科学，コンピュータ科学などそのものやその体系を学習させるのではなく，それらがもっている「数理」の思想を学ばすことが肝要である。

参考文献

塩野直道（1970）「数学教育論」啓林館　PP.40-43

本間俊宏（1990）「子どもの認識と数学教育－論理性についての考察－」
親和女子大学研究論叢第23号
親和女子大学　PP.107-121

徳田雄洋（1990）「はじめて出会うコンピュータ科学」1〜8　岩波書店

柳本朋子（1994）「小学校におけるアルゴリズムの教育について」
1994年度数学教育学会春季年会発表論文集PP.60-63

本間俊宏・寺田幹治・金谷博史（1994）「ファジィ理論の学校数学への導入」
1994年度数学教育学会秋季例会発表論文集PP.155-158

本間俊宏（1995）「数学教育の思想性の考察」
児童教育学研究第14号
神戸親和女子大学児童教育学会　PP.20-30

本間俊宏（1997）「数理思想の教育」
日中数学教育学研究会発表論文集PP.37-42

本間俊宏・大西慶一（1997）「コンピュータ科学の基礎，その教育の研究と実践－XII」
1997年度数学教育学会秋季例会発表論文集PP.132-134

徳田雄洋（1997）ジュニア版コンピュータ科学入門1〜5　岩波書店

本間俊宏（1998）「数理思想の教育」
児童教育学研究第17号
神戸親和女子大学児童教育学会　PP.22-42

本間俊宏（1999）「数学の思想の教育」
1999年度数学教育学会秋季例会発表論文集PP.132-134

本間俊宏・桝田尚之・瀬尾祐貴（2000）「数学の思想の教育とモデリング－グラフ理論からのアプローチ－」
算数・数学教育研究国際交流大阪会議論文集
PP.22-25

本間俊宏（2002）「算数・数学・情報教育の創造」
第2回算数・数学・情報教育談話会発表論文