微分の分野における近似等号を用いた表現と現行教科書との比較

A Comparison Between Expressions Using Approximate Equality and Current Textbooks in the Derivative Field

松　本　宗　久

概　要

高等学校の数学において、微分・積分を含む極限に関する事柄の説明について、初学者は『限りなく近づく』という数学としてはいささか曖昧な表現を、厳密な裏付けをせず何となく受け止めた上で学習を進めていく。（厳密な裏付けは、大学初年時等に $\varepsilon-\delta$ 法を学ぶことで身につける）金井［１］は、近代に解析学が発達する前の時代から考案されていた近似等号と言われる考え方に着目した。そして、『基本性質のみを用いた分かり易い定理証明や概念説明の授業実践例も蓄積していかなければならない。』と述べている。そこで今回は、高等学校の教科書に記述されている極限や微分の、主にlimを取り扱う部分を、近似等号に置き換えた場合と併記しながら比較・確認していくことで、金井のいう分かり易さがどこまで実現されるかについて探求していきたい。

キーワード：近似等号、微分、数学教育

1　近似等号とは

1.1　近似等号とは

まずここでは金井の示した近似等号の概要と、その定義について述べる。（以降、原則として金井の文献は［１］を参照したものである。）

関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続であることを理解しやすいように「$x \approx a$ ならば $f(x) \approx f(a)$（ただし、$\approx$ は**近似等号**とする）」とし、これを「x が a に近づくとき、$f(x)$ は $f(a)$ に近づく」と読む。

このように生徒に説明することで、極限記号であるlimを用いずに簡明に説明が可能であるとした。

この説明について金井は『イメージに訴える表現としては許されるが、論理的説明としては成立しない』のではないかと考えた。そこで、この点について、近似等号の定義を厳密に行い、論理的説明が成立することを示した上で、『近似等号を利用した授業が、学生・生徒の理解をすすめる上で有益である』と示唆している。

神戸親和女子大学　教育学部　児童教育学科　教授

1.2　近似等号の定義

以下に金井が示した近似等号の定義を記す。

a を閉区間［c, d］に属する実数、$f(x)$ と $g(x)$ を［c, d］からなる実数 R への関数とする。

このとき、「任意の正の実数 ε に対し, $|x - a| \leq \delta$ ならば $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon \cdot |x - a|^n$ で、$\delta \leq 1$ を満たす正の実数 δ が存在する」ことを「$x \approx a$ ならば $f(x) \approx_n g(x)$」で表し、「x が a に近づくとき、レベル n で $f(x)$ は $g(x)$ に近づく」と読む。とした。これにより厳密な定義が可能になるが、今回は定義を示すに留める。これを用いた基本性質の証明については、文献を参照されたい。

1.2.1　近似等号の定義を用いた簡単な例

以下に著者の考えた近似等号のレベル 0 とレベル 1 の簡単な例を説明する。

i）2 つの関数 $f(x) = x - a$ と $g(x) = 0$（x 軸）の交点は、$(a, 0)$ である。

この場合、変数 x が、定数 a に近づくとき、2 つの関数のグラフ自身も、各 x 座標において、交点に近づくほど、グラフの y 座標間の距離が縮まっていき、最後には 0 になることがわかる。

このことを「$x \to a$ ならば $x - a \approx_0 0$」と表現し、「x が a に近づくならば、レベル 0 で $x - a$ は 0 に近づく」と読む。

ii）関数 $h(x) = (x - a)^2$ と $g(x) = 0$ の交点も、$(a, 0)$ である。

この場合、変数 x が、定数 a に近づくとき、2 つの関数のグラフ $h(x)$ と $g(x)$ の y 座標間の距離は、最後には同じく 0 になるものの、先程の $f(x)$ と $g(x)$ のときよりも縮まり方が急激であることがわかる。

そこでこのことを「$x \to a$ ならば $(x - a)^2 \approx_1 0$」と表現し、「x が a に近づくならば、レベル 1 で $x - a$ は 0 に近づく」と読む。

尚、$(x - a)$ にかかる乗数をあげていくほど、縮まり方が急になっていき、（乗数 -1）のレベルで近づいていくこととなる。

2　高等教科書の表現と近似等号との比較

次にあげるそれぞれの項目について、巻末に参考文献としてあげた高等学校数学の現行教科書［2］［3］での表現と、それに対して、近似等号を用いた表現はどのようなものであるかを併記し、必要に応じて、表現の仕方を比較してみることとする。ただし比較し易いように、文献中の金井の文章については、筆者が引用箇所について、教科書に書きぶりを合わせる試みを独自に行っている。

2.1　関数の極限

2.1.1　高校教科書での表現

「一般に、関数 $f(x)$ において、x が a と異なる値をとりながら、a に限りなく近づくとき、$f(x)$ の値が一定の値 α に限りなく近づくならば、この値 α を $x \to a$ のときの $f(x)$ の**極限値**または**極限**という。このことを、次のように書き表す。」

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha \text{または} x \to a \text{のとき} f(x) \to \alpha$$

2.1.2　近似等号による表現

『関数 $f(x)$ において、x が a に近づくときの極限値が $f(a)$ であるとは $x \approx a$ ならば $f(x) \approx f(a)$ が成り立つことをいう』とあり、これを教科書の書きぶりに合わせると、以下のようになろう。

「関数 $f(x)$ において、x が a に近づくとき、$f(x)$ が α に近づくならば、この値 α を x が a に近づくとき の**極限値**という。このことを、次のように書き表す。」

$$x \approx a \text{ ならば } \quad f(x) \approx \alpha$$

このように見ると、教科書での表現の右側と、近似等号によるそれは、似ているといえる。

2.2　関数の連続

2.2.1　高校教科書での表現

「一般に、関数 $f(x)$ において、その定義域内の x の値 a に対して、極限値 $\lim_{x \to a} f(x)$ が存在し、$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ が成り立つとき、$f(x)$ は $x = a$ で連続であるという。このとき、$y = f(x)$ のグラフは $x = a$ でつながっている。」

2.2.2　近似等号による表現

文献では『関数 $y = f(x)$ が $x = a$ で連続であるとは、$x \approx a$ ならば $f(x) \approx f(a)$ が成り立つことをいう』とある。教科書の書きぶりに合わせると、

「関数 $f(x)$ において、その定義域内の x の値 a に対して、$x \approx a$ ならば $f(x) \approx f(a)$ が成り立つとき、$f(x)$ は $x = a$ で連続であるという。」

となろう。教科書に比べ、シンプルな表現であるが、これは「x が a に近づくとき、$f(x)$ が $f(a)$ に近づくならば、$f(a)$ は x が a に近づくときの極限値である。この極限値 $f(a)$ が存在する」ことが文中に含まれていることによるものであると考えられる。

2.3　微分可能性

2.3.1　高校教科書での表現

「関数 $f(x)$ において、極限値 $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が存在するとき、$f(x)$ は $x=a$ で**微分可能**であるという。またこの値を $x=a$ における**微分係数**または変化率と言い、$f'(a)$ で表す。」

2.3.2　近似等号による表現

文献では『関数 $y=f(x)$ が、$x=a$ で**微分可能**であるとは、$x \approx a$ ならば $f(x) \approx_1 mx+n$ となる実数 m と n が存在することをいう。』となっている。

これについては、レベルの概念が入ってくることから教科書と書きぶりが異なっている。そこでこのことについて文献の別項にあげられている公式1について述べておこう。

公式1［微分と近似等号 ≈］（一部抜粋）

a をある区間 $[b, c]$ に含まれる実数, $f(x)$ をその区間を定義域に含む実数値関数とする。このとき、次の各条件は同値となる。（公式の各証明は、文献を参考のこと）

（1）「$x \approx a$ ならば $f(x) \approx_1 mx+n$」

（2）「$f(a)=ma+n$, $x \approx a$ かつ $x \neq a$ ならば $m \approx \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$」

尚、明らかに、条件 $f(a)=ma+n$ は $f(x)$ が $x=a$ において連続であるという条件に換えることができる。

この公式1の2つの条件が同値であることを用いると、以下のような書きぶりになろう。

「関数 $f(x)$ において、ある実数 a について $h=x-a$ とおく。

$f(a)=ma+n$, $x \approx a$ かつ $x \neq a$ であるとき、$m \approx \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ならば関数 $y=f(x)$ は、$x=a$ で**微分可能**であるという。またこの値 m を $x=a$ における**微分係数**または変化率と言い、$f'(a)$ で表す。」

となろう。この部分については、極限や連続の表現と違い、少々わかりにくいので、より生徒に分かりやすい表現や説明を検討する必要があると考える。

3　授業事例

ここからは、授業でとりあげられるいくつかの事例について、前節同様に、教科書と近似等号の表現について比較していくことにする。

3.1　三角関数 sin x の導関数

3.1.1　高校教科書での表現

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

において

$$\sin(x+h)-\sin x=(\cos h-1)\sin x+\cos x\sin h$$

であるから

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos h-1}{h}\sin x+\frac{\sin h}{h}\cos x\right)$$

ここで、

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}=0,\ \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$$

により

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}=0\cdot\sin x+1\cdot\cos x=\cos x$$

よって

$$(\sin x)'=\cos x$$

3.1.2　近似等号による表現

$$h\approx 0\text{ ならば }\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

において

$$\sin(x+h)-\sin x=(\cos h-1)\sin x+\cos x\sin h$$

であるから

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\frac{\cos h-1}{h}\sin x+\frac{\sin h}{h}\cos x$$

ここで、

$$h\approx 0\text{ ならば }\frac{\cos h-1}{h}\approx 0,\quad \mathrm{h}\approx 0\text{ ならば }\frac{\sin h}{h}\approx 1$$

により

$$h\approx 0\text{ ならば }\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\approx 0\cdot\sin x+1\cdot\cos x=\cos x$$

よって

$$(\sin x)'=\cos x$$

以上より、近似等号での表現は、ほぼ lim を用いた表現と同じように書けることが分かる。

ただし、lim が必要な部分と ≈ が必要な部分に微妙に違いがあり、書きぶりを合わせること。= の表記であるべきところと ≈ でなければならないところをはっきりと判断しなければならず、その点を検討する必要があろう。

3.2　接線の方程式

続いて、筆者が、近似等号を用いた表現が理解を深めると考えた事例として、$y=\sin x$ の接線の求め方について述べていきたい。ここでは、文献にあった例題『$x=\frac{\pi}{3}$ のときの $y=\sin x$ の接線の方程式を求めよ。』という問題について考えてみることとする。

3.2.1　高校教科書での表現

接線の方程式については以下の式が記載されている。

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線の方程式は

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

である。

これを用いて先程の例題を解く場合、まず導関数を求めた上で、接線の交点を代入して接線の方程式を求める。

$y = \sin x$ において、点 $\left(\frac{\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ の接線の方程式は

導関数は　$(\sin x)' = \cos x$

であるから

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

となり、したがって

$$y - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

よって

$y = \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ が、求める接線の方程式である。

3.2.2　近似等号による表現

「$x \approx a$ ならば $f(x) \approx_1 mx + n$」を利用して $x \approx 0$ ならば $\sin x \approx_1 x$（$m = 1,\ n = 0$）であることを前提とする。（これは、$\sin x$ の $x = 0$ での微分係数が x で近似できることによる）

$x \approx \frac{\pi}{3}$ のとき $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \approx_1 1$

なので、加法定理を利用して

$$\sin x = \sin\left(x - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3} + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3}$$

$$\approx_1 \left(x - \frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3} + 1 \times \sin\frac{\pi}{3} \approx_1 \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

以上より、

$y = \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ が、求める接線の方程式である。

このように近似等号を利用すると、教科書の解き方とはまた違った方法が利用でき、双方に通じることで色々な応用が効く可能性があると考えられる。

4　まとめ

近似等号を用いた表現方法は、教科書と同じような読み方に合わせると、同様な記述をより簡明にできる可能性があることが、いくつかの事例で示唆された。また、接線の方程式の計算事例のように、慣れれば一般的な解法よりシンプルになるものもあると考えられる。

一方で、微分可能の表現などには近似等号に関するレベル等、独自の表現があり例えば n 次近似の方法や、微分係数の計算などは、簡略化した説明とどこが違うのか、という指摘もあろう。またレベル 0 とレベル 1 の計算が混在する場合、正確にはどれにあたるのか、という判断などは、初学者を混乱させると感じられた。

また、接線の方程式で用いた $x \approx 0$ ならば $\sin x \approx_1 x$ という表現は、マクローリン展開による近似式と同じ結果が出ており、それは何故なのか合わせて考えるべきと感じた。

今後は定義と $\varepsilon - \delta$ 法とのより詳細な比較や、公式のより詳細な確認を行い、既存の体系とうまく整合性をとることや、高校生の解く一般的な問題について、教科書と近似等号の両方の表現でより多く比較する事で、生徒の理解が更に進むような方法は何かを模索していきたい。

参考文献

[1] 金井　康雄. 2006.「近似等号による解析学授業法構築の試み（*A Pilot Study of Teaching Analysis with Approximately Equalities*)」. 日本数学教育学会高専・大学部会論文誌. 13巻. 1号. (pp11-22）.

[2] 数研出版. 2020. 改訂版　高等学校　数学Ⅱ（数Ⅱ/328).

[3] 数研出版. 2020. 改訂版　高等学校　数学Ⅲ（数Ⅲ/323).