

# 二重振り子の周期的な振る舞い

山 口 巖

## On the Periodical Behavior of a Double Pendulum

Iwao YAMAGUCHI

### 要 旨

二重振り子の周期的な振る舞い、特に2つの振り子の初期角度が大きい場合の周期的な振る舞いが数値的な方法で調べられた。2つの振り子の初期角度の特別な組み合わせに対して、2つの振り子が同方向に振動する場合、下側のおもりは静かに手放されてから最下点まで徐々に加速され、その後手放した位置とは上側のおもりの固定点を通る鉛直軸に関して反対側の対称な位置まで徐々に減速される。その後、逆の経路をたどって最下点まで徐々に加速され、続いて徐々に減速されて手放した位置まで戻る。この振動が周期的に繰り返される。一方、上側のおもりは静かに手放されてから徐々に加速されるが、最下点の手前で減速され、その後最下点を通過してしばらくは加速され、その後手放した位置とは上側のおもりの固定点を通る鉛直軸に関して反対側の対称な位置まで徐々に減速される。その後、逆の経路をたどって最下点の手前まで徐々に加速され、その後減速されて最下点を通過し、続いてしばらくは加速された後、徐々に減速されて手放した位置まで戻る。この振動が周期的に繰り返される。そして、2つの振り子の振幅は位相を等しくして同じ周期で振動することが見いだされた。2つの振り子が逆方向に振動する場合は、同方向に振動する場合の上側と下側のおもりの振動の仕方を入れ

替えた場合に対応するように周期的に振る舞うことも見いだされた。2つのおもりの時間経過に伴う運動エネルギーと位置エネルギーの変化からこれら周期的な振る舞いは説明できる。また、二重振り子の周期的な振る舞いが2つの振り子の初期角度の数多くの組み合わせ（小さい角度の組み合わせからかなり大きい角度の組み合わせまで）に対して一般的な特性であることが数値的に見いだされた。

2つの振り子の初期角度が極端に大きい場合の2つの振り子の振る舞いについても言及し、カオスを特徴づける数理的性質の1つである「初期値に対する鋭敏な依存性」を確かめることにより、その振る舞いがカオス的事であることの傍証を与える。

キーワード：二重振り子，周期的な振る舞い，カオスの振る舞い

## 1. はじめに

二重振り子の運動は、その運動を記述する微分方程式が高度に非線型であり、2つの振り子の振幅が小さいとして線形化を行い解析的に積分して解を求める微小振動理論のような限定された場合以外は解析的に解くことが不可能である。しかしながら、微小振動理論が適用できない場合でも数値的に解くことができる。2節では、二重振り子の運動を記述する1階連立微分方程式を導出し、3節では、これら1階連立微分方程式を数値的に解法するためのルンゲークッタ法について述べる。4節では、二重振り子の周期的な振る舞いの具体的な数値解法例を示し考察する。5節では、二重振り子の初期角度が極端に大きい場合の数値シミュレーション例を示し2つの振り子の振る舞いを考察する。

## 2. 二重振り子のハミルトニアンとハミルトンの正準方程式

重さを無視できる長さ  $l_1$  のロッドの一端を回転軸に固定し、他端に質量  $m_1$  のおもり1を取り付ける。さらに、このおもり1に固定された回転軸に重さを無視できる長さ  $l_2$  のロッドの一端を固定し、他端に質量  $m_2$  のおもり2を取り付ける。二重振り子と呼ばれるこの系は1つの鉛直面内で自由に振動あるいは

回転できるものとし、その運動を考察する。おもり1のロッドを固定する回転軸を原点Oにとり、水平右向きにx軸、鉛直下向きyに軸をとるとき、この二重振り子はxy平面内で運動するものとする。(図1)

今、任意の時刻におけるおもり1とおもり2のロッドが鉛直下方となす角度をそれぞれ $\theta_1$ 、 $\theta_2$ とすると、この二重振り子の系のハミルトニアン $H$ は次で表される。(付録1)

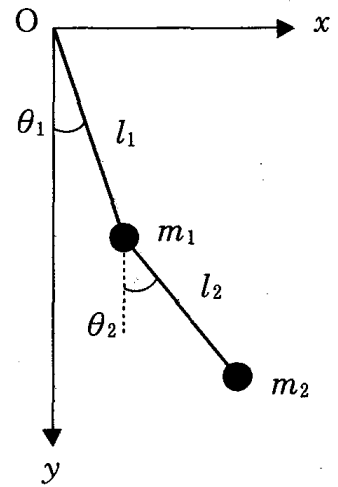


図1

$$H = \frac{\frac{p_{\theta_1}^2}{2m_1 l_1^2} + \frac{p_{\theta_2}^2}{2m_2 l_2^2} \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) - \frac{p_{\theta_1} p_{\theta_2}}{m_1 l_1 l_2} \cos(\theta_1 - \theta_2)}{1 + \frac{m_2}{m_1} \sin^2(\theta_1 - \theta_2)} - (m_1 + m_2) g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g l_2 \cos \theta_2 \quad (1)$$

ここで、力学変数 $p_{\theta_1}$ と $p_{\theta_2}$ は $\theta_1$ と $\theta_2$ に共役な一般化運動量であり、 $g$ は重力の加速度である。

このハミルトニアン $H$ をハミルトンの正準方程式に適用することにより、力学変数 $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 、 $p_{\theta_1}$ 、 $p_{\theta_2}$ に対する次の連立1次常微分方程式を得る。(付録2)

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_1}{dt} &= \frac{\frac{p_{\theta_1}}{m_1 l_1^2} - \frac{p_{\theta_2}}{m_1 l_1 l_2} \cos(\theta_1 - \theta_2)}{1 + \frac{m_2}{m_1} \sin^2(\theta_1 - \theta_2)}, \\ \frac{d\theta_2}{dt} &= \frac{\frac{p_{\theta_2}}{m_2 l_2^2} \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) - \frac{p_{\theta_1}}{m_1 l_1 l_2} \cos(\theta_1 - \theta_2)}{1 + \frac{m_2}{m_1} \sin^2(\theta_1 - \theta_2)}, \\ \frac{dp_{\theta_1}}{dt} &= \frac{\left[ \left\{ \frac{p_{\theta_1}^2}{m_1 l_1^2} + \frac{p_{\theta_2}^2}{m_2 l_2^2} \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) \right\} \frac{m_2}{m_1} \cos(\theta_1 - \theta_2) - \frac{p_{\theta_1} p_{\theta_2}}{m_1 l_1 l_2} \left(1 + \frac{m_2}{m_1} + \frac{m_2}{m_1} \cos^2(\theta_1 - \theta_2)\right) \right] \sin(\theta_1 - \theta_2)}{\left\{ 1 + \frac{m_2}{m_1} \sin^2(\theta_1 - \theta_2) \right\}^2} \\ &\quad - (m_1 + m_2) g l_1 \sin \theta_1, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{dp_{\theta_2}}{dt} = \frac{\left[ \left\{ \frac{p_{\theta_1}^2}{m_1 l_1^2} + \frac{p_{\theta_2}^2}{m_2 l_2^2} \left( 1 + \frac{m_2}{m_1} \right) \right\} \frac{m_2}{m_1} \cos(\theta_1 - \theta_2) - \frac{p_{\theta_1} p_{\theta_2}}{m_1 l_1 l_2} \left( 1 + \frac{m_2}{m_1} + \frac{m_2}{m_1} \cos^2(\theta_1 - \theta_2) \right) \right] \sin(\theta_1 - \theta_2)}{\left\{ 1 + \frac{m_2}{m_1} \sin^2(\theta_1 - \theta_2) \right\}^2} - m_2 g l_2 \sin \theta_2.$$

式(2)は高度に非線形であり、一般に、このような非線形1階連立微分方程式を解析的に積分して解を求めることは不可能である。そして通常、数値解法によってのみ積分可能である。

### 3. ハミルトンの正準方程式のルンゲクッタ法による数値解法

#### 1階微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad (3)$$

を考える。ここで、 $x$ は $N$ 成分ベクトルである。また、 $f(x)$ は陽に時間 $t$ への依存性を持たないとする。そのとき、方程式(3)は次の積分方程式と恒等的である。

$$x(t+h) = x(t) + \int_0^h f[x(t+\tau)] d\tau \quad (4)$$

ルンゲクッタ法は式(4)の積分の近似的な評価によって、小さい $h$ に対して、正確に $x(t+h)$ を評価する数値的な方法である。4次のルンゲクッタ法の公式は次で与えられる。

$$\begin{aligned} d_1 &= hf[x(t)] \\ d_2 &= hf\left[x(t) + \frac{d_1}{2}\right] \\ d_3 &= hf\left[x(t) + \frac{d_2}{2}\right] \\ d_4 &= hf[x(t) + d_3] \\ x(t+h) &= x(t) + \frac{d_1 + 2d_2 + 2d_3 + d_4}{6} \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 $d_i (i=1,2,3,4)$  は  $N$  成分ベクトルである。式(5)により、まず、 $d_1$  が時刻  $t$  における  $x$  を用いて計算される。次に、時刻  $t$  における  $x$  と計算された  $d_1$  を用いて  $d_2$  が計算される。以下同様に、時刻  $t$  における  $x$  と計算された  $d_2$  を用いて  $d_3$  が計算され、さらに、時刻  $t$  における  $x$  と計算された  $d_3$  を用いて  $d_4$  が計算される。そして最後に、時刻  $t$  における  $x$  と計算された  $d_i (i=1,2,3,4)$  を用いて時刻  $t+h$  における  $x$  が  $O(h^5)$  の誤差で求められる。

$t=0$  における初期値  $x(0)$  が与えられたとき、式(5)より  $t=h$  における値  $x(h)$  が求められる。この  $x(h)$  を、再度、式(5)に適用することにより  $t=2h$  における値  $x(2h)$  が求められる。以下同様に、時刻  $(k-1)h$  における  $x((k-1)h)$  を、再度、式(5)に適用することにより  $t=kh$  における値  $x(kh)$  が求められる。ここで、 $k=3, \dots, \frac{T}{h}$  であり、 $T$  は興味ある時間範囲である。こうして、興味ある時間範囲にわたって時間刻み  $h$  ごとの  $x$  の値が求められる。<sup>1)</sup>

式(3)とハミルトンの正準方程式(2)とは、 $x$  の各要素が  $\theta_1, \theta_2, p_{\theta_1}, p_{\theta_2}$  に対応し、 $f(x)$  の各要素が式(2)の各式の右辺に対応している。

計算を実行するに当たって、誤差の累積による解の正確さが問題となるが、ここではハミルトニアン  $H$  が系の全エネルギーに等しく一定に保たれることを利用し解の正確さを確認することができる。具体的には、各時間ステップごとに系の全エネルギーを計算し、 $O(h^5)$  の誤差が無視できるならば、そのとき系の全エネルギーが一定になることをモニターすることによって、解の正確さを確認することができる。

#### 4. 二重振り子の周期的振る舞いの数値解法例

二重振り子に対する周期的な振る舞いについては、すでに、二重振り子 ( $l_1=l_2=1\text{m}, m_1=m_2=1\text{kg}$ ) がカオス的な振る舞いへ移行する前段階における 2 つの振り子のある特別な初期角度 ( $\theta_1(0)=\theta_2(0)=63.3^\circ$ ) に対して数値的に言及されている。<sup>2)</sup>

この節では、二重振り子に対する周期的な振る舞いが、2 つの振り子のただ

1つの特別な初期角度の組み合わせだけでなく、数多くの組み合わせ（小さい角度の組み合わせからかなり大きい角度の組み合わせまで）に対して、一般的な特性であることを数値的に示すためにその解法例を数多く示す。

ここでの数値解法では次のパラメータが使われる。

$$l_1 = l_2 = 0.2\text{m}, m_1 = m_2 = 0.1\text{kg}, g = 9.8\text{m/s}^2 \quad (5)$$

以下の例は、初期角度に対する初期条件  $\theta_1(0)$  と  $\theta_2(0)$  を指定し、一般化運動量に対する初期条件を  $p_{\theta_1}(0) = p_{\theta_2}(0) = 0$  として、時間刻み  $h = 0.001\text{s}$  ごとに物理量  $\theta_1, \theta_2, p_{\theta_1}, p_{\theta_2}$  を計算するという方法で Mathematica3.0 を使って実行された。一例として  $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 64.3^\circ$  の場合のプログラム例を付録3に示す。

#### A. $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 64.3^\circ$ の場合

この例は(5)のパラメータに対する前出の数値例<sup>2)</sup>に対応している。図2は  $\theta_1$  と  $\theta_2$  の位相平面における軌道である。2つの振り子の振れの角度の点  $(\theta_1, \theta_2)$  は時間の経過にともない、2つのおもりを静かに手放した右上 ( $\theta_1 = \theta_2 = 64.3^\circ = 1.12\text{rad}$ ) から左下 ( $\theta_1 = \theta_2 = -64.3^\circ = -1.12\text{rad}$ ) へ、そして左下から右上へと周期的に変化する。しかも軌道は完全に対称的であることがわかる。さらに、軌道は原点近傍では急峻に変化し、左下と右上ではなだらかに変化することもわかる。このように変化する主たる原因がおもり1の振る舞いに起因することは、おもり1の運動エネルギー (KE) と位置エネルギー (PE) の変化の様子を調べることによりわかる。

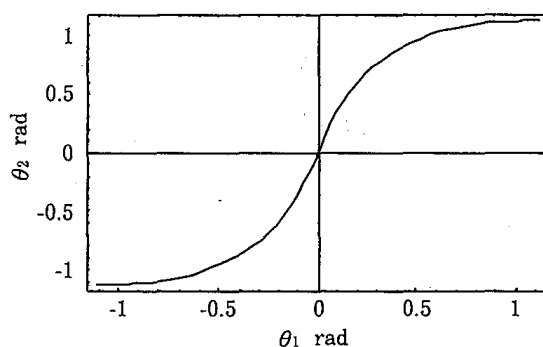


図2

図3と図4はおもり1とおもり2のそれぞれの安定平衡位置を基準にとったときの運動エネルギー (KE) と位置エネルギー (PE) の時間経過にともなう変化の様子を示している (時間刻み  $h=0.001s$  で, おもり1とおもり2の運動エネルギーと位置エネルギーの数値結果をプロットしたもの)。図3からおもり1の運動エネルギーと位置エネルギーの点 ( $KE_1, PE_1$ ) は, 折れ曲がったなめらかな曲線上を, 時間の経過にともない左上 ( $KE_1=0J, PE_1=0.11J$ ) から右端 ( $KE_1=0.053J, PE_1=0.032J$ ) へ, さらに左 ( $KE_1=0.013J, PE_1=0J$ ) へと変化し, その後, この経路を逆にたどって左上へ戻るという変化を示す。一方, 図4からおもり2の運動エネルギーと位置エネルギーの点 ( $KE_2, PE_2$ ) は, 左上 ( $KE_2=0J, PE_2=0.22J$ ) からほぼ単調な曲線上を右下 ( $KE_2=0.32J, PE_2=0J$ ) へ, そして右下から左上への変化を示す。

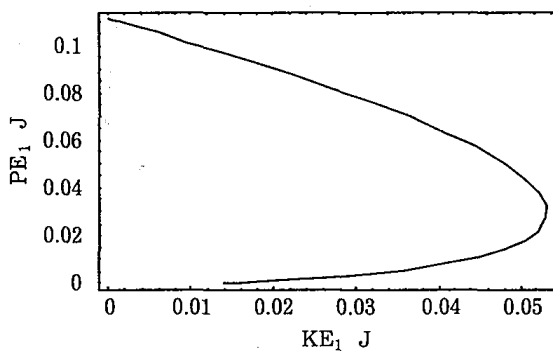


図3

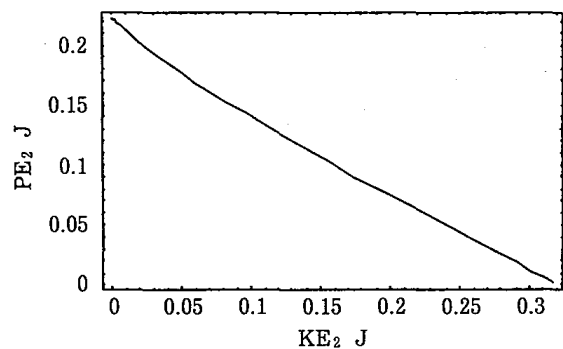


図4

おもり1とおもり2のより詳細な振る舞いは, 2つのおもりの振れの角度, 運動エネルギーそして位置エネルギーの時間変化を観察することにより得られる。図5から図7はおもり1の振れの角度, 運動エネルギーそして位置エネルギーの時間変化を, そして図8から図10はおもり2の振れの角度, 運動エネルギーそして位置エネルギーの時間変化をそれぞれ1周期にわたって図示したものである。これらの図をもとに, 2つのおもりの振る舞いを比較するとき, おもり1はおもり2より特異な振る舞いをする事がわかる。つまり, おもり2は, 単振り子の振る舞いに近い, 振れの角度のなめらかな減少と増加を繰り返す (図8)。また, 運動エネルギーと位置エネルギーの時間変化もなめらかな増加と減少 (図9), そして減少と増加 (図10) を繰り返す。一方, おもり1

の振る舞いはおもり 2 の振る舞いとは対照的に複雑である。その運動エネルギーは0.17秒後に最大値0.053Jに達し、その後0.31秒には0.013Jまで減少し、さらにその後、0.45秒には最大値まで戻り、その後、0.63秒に最小値0Jまで減少するという複雑な振る舞いを繰り返す(図6)。しかし、位置エネルギーの時間変化はなめらかな減少と増加を繰り返す(図7)。おもり1の運動エネルギーの時間変化は振れの角度の時間変化(図5)に反映されている。おもり1を静かに手放してから、おもり1は徐々に加速され0.17秒後に最大速度に達するため、振れの角度は0.17秒近傍で、単位時間あたり大きい角度で減少する。その後、おもり1は徐々に減速されるため、振れの角度は単位時間あたり小さい角度で減少し、時刻0.31秒に最下点を通る。その後、おもり1は徐々に加速され0.45秒後に最大速度に戻るため、この時刻の近傍では振れの角度は単位時間あたり大きい角度で減少する。その後、おもり1は徐々に減速され0.63秒に、おもり1を手放した位置とはy軸に関して対称な位置に達する。そして、その後、おもり1はこの経路を逆にたどって、おもり1を手放した位置まで戻る。

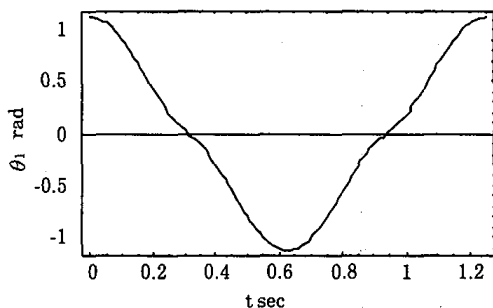


図5

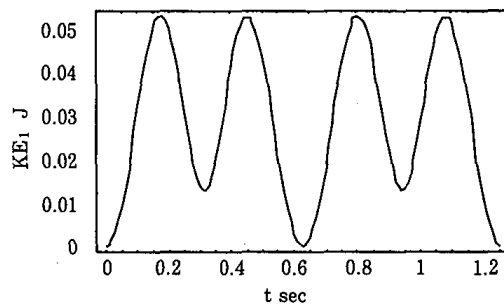


図6

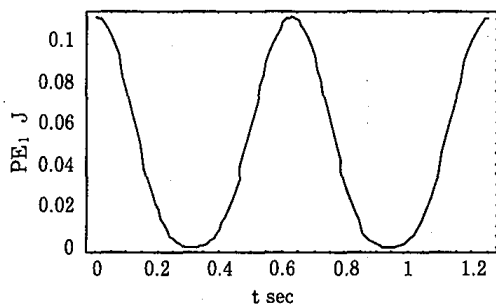


図7

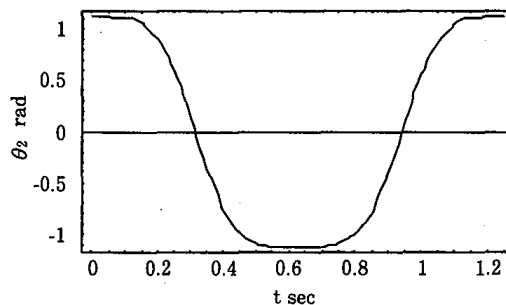


図8



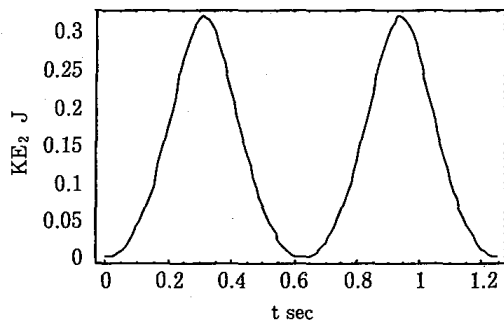


図 9

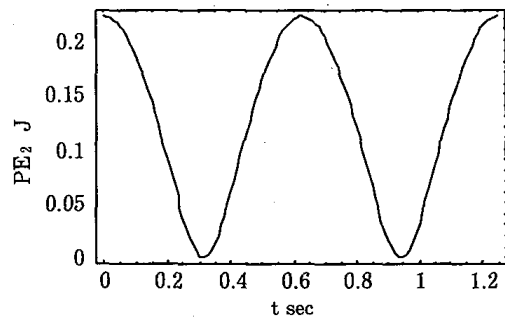


図10

以上の分析から、振れの角度の周期的な軌道（図 2）の出現を半周期について考察すると、おもり 1 とおもり 2 を静かに手放した後、両方のおもりは徐々に加速されるが、おもり 1 の方がおもり 2 より加速の度合いが大きいいため、おもり 1 の振れの角度はおもり 2 に比べて単位時間あたり大きい角度で減少する  $[(\theta_1, \theta_2) = (64.3^\circ, 64.3^\circ) = (1.12\text{rad}, 1.12\text{rad}) \text{ から } (\theta_1, \theta_2) = (31.5^\circ, 57.3^\circ) = (0.55\text{rad}, 1.00\text{rad}) \text{ の段階}]$ 。その後、おもり 1 は徐々に減速されるが、おもり 2 は加速し続けるため、おもり 1 の振れの角度は単位時間あたり小さい角度で減少するのに対しておもり 2 の振れの角度は単位時間あたりの振れの角度を徐々に大きくしながら減少する  $[(\theta_1, \theta_2) = (31.5^\circ, 57.3^\circ) = (0.55 \text{ rad}, 1.00 \text{ rad}) \text{ から } (0^\circ, 0^\circ) = (0\text{rad}, 0\text{rad}) \text{ の段階}]$ 。そして最下点でともに振れの角度は  $0^\circ$  になる。最下点での運動エネルギーはおもり 1 が  $0.013 \text{ J}$ 、おもり 2 が  $0.32 \text{ J}$  である。最下点を通過後、おもり 1 は徐々に加速され、おもり 2 は徐々に減速されるが、おもり 1 の加速の度合いよりおもり 2 の減速の度合いの方が大きいいため、おもり 2 の振れの角度はおもり 1 に比べて単位時間あたり大きい角度で減少する  $[(\theta_1, \theta_2) = (0^\circ, 0^\circ) = (0\text{rad}, 0\text{rad}) \text{ から } (-31.5^\circ, -57.3^\circ) = (-0.55\text{rad}, -1.00\text{rad}) \text{ の段階}]$ 。そして、加速を続けていたおもり 1 が最大速度に達した後、おもり 1 は減速に転じ、減速する。この段階ではおもり 1 の方がおもり 2 より減速の度合いが大きいいため、おもり 1 の振れの角度はおもり 2 のそれに比べて単位時間あたり大きい角度で減少する  $[(\theta_1, \theta_2) = (-31.5^\circ, -57.3^\circ) = (-0.55\text{rad}, -1.00\text{rad}) \text{ から } (-64.3^\circ, -64.3^\circ) = (-1.12\text{rad}, -1.12\text{rad}) \text{ の段階}]$ 。そして、2 つのおもりはおもりを手放した位置とは  $y$  軸に関して対称な位置に達する。

以上の考察から、振れの角度の周期的な軌道（図 2）の出現の主たる原因は、

おもり 1 の運動が、おもり 2 の加速から減速に転じるような単純な運動ではなく、加速から減速そして続けて加速から減速するという複雑な振る舞いに起因することがわかった。

図 5 と図 8 から振れの角度  $\theta_1$  は  $\theta_2$  周期 1.25 秒で周期的に振動するがわかる。

二重振り子の運動をおもり 1 と 2 の軌跡としてコンピュータでシミュレートするとき、上で考察した二重振り子の運動の周期性はより明白になる。図 11 は  $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 64.3^\circ$   $p_{\theta_1}(0) = p_{\theta_2}(0) = 0$  に対して、時間刻み 0.03 秒でシミュレートした結果である。おもり 1 と 2 が鉛直方向から右上方  $64.3^\circ$  の位置まで持ち上げられ、静かに手放されるとき、 $\theta_1$  と  $\theta_2$  は位相を等しくして同周期 (1.25 秒) で振動する。つまり、 $\theta_1$  が極大のとき  $\theta_2$  も極大、 $\theta_1$  が極小のとき (左に傾き極大)  $\theta_2$  も極小、また  $\theta_1 = 0$  のときは  $\theta_2 = 0$  になるように振動することがわかる。また、おもり 1 の特異な振る舞い (加速から減速そして続けて加速から減速するという振る舞い) も見て取れる。

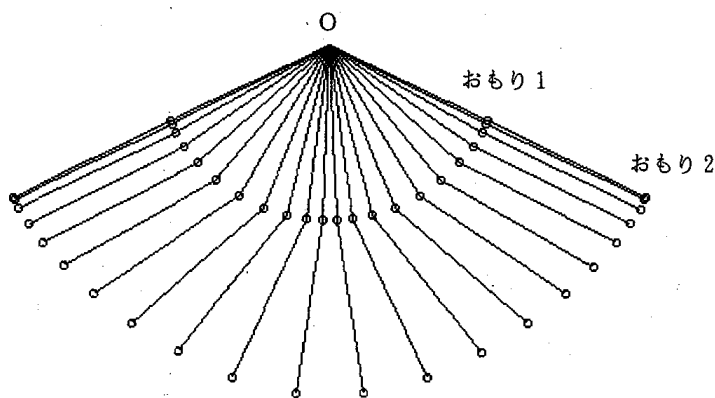


図 11

以上は、 $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 64.3^\circ$  というかなり大きい角度に対して、二重振り子が周期的な振る舞いを呈する例であったが、この角度以外の角度対  $(\theta_1(0), \theta_2(0))$  に対しても周期的な振る舞いが見いだされる。

以下では、 $0^\circ < \theta_1(0), \theta_2(0) < 64.3^\circ$  に対して、周期的な振る舞いを呈する初期角度対  $(\theta_1(0), \theta_2(0))$  のいくつかの例を調べる。

**B.  $\theta_1(0)=40^\circ, \theta_2(0)=49.1^\circ$  の場合**

A.の場合と比較して、初期角度  $\theta_1(0)$  と  $\theta_2(0)$  は小さい角である。この場合も、2つの振り子の振れの角度 ( $\theta_1, \theta_2$ ) は、図12の軌道図からわかるように図2と同様な振る舞いをするが、その変化は図2と比較してなだらかであることがわかる。

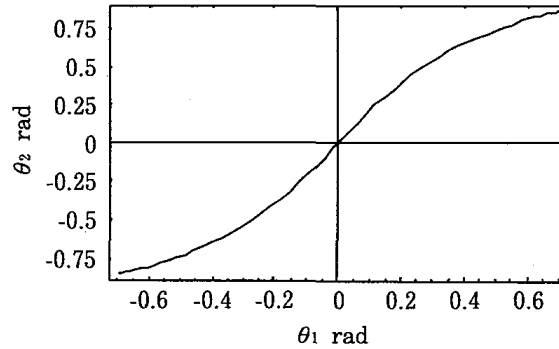


図12

A.の場合と同様、この変化の様子はおもり1とおもり2の運動エネルギー (KE) と位置エネルギー (PE) の時間経過にともなう変化 (図13と図14) を調べることで説明できる。すなわち、おもり2は静かに手放されてから最下点まで徐々に加速され、その後最下点を通過して手放した位置とはy軸に関して対称な位置まで徐々に減速される。そしてその後、逆の経路をたどって手放した位置まで戻る (図14)。一方、おもり1は静かに手放されてから徐々に加速されるが、最下点の手前で減速され、その後最下点を通過してしばらくは加速されるが、その後手放した位置とはy軸に関して対称な位置まで徐々に減速される。そしてその後、逆の経路をたどって手放した位置まで戻る (図13)。

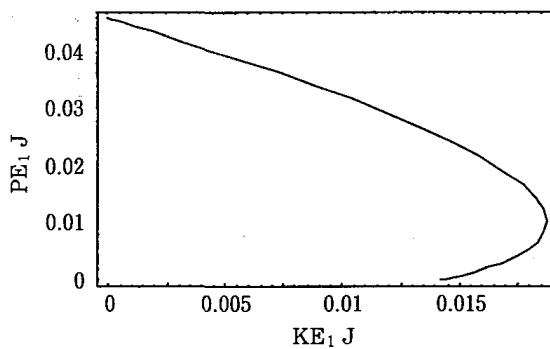


図13

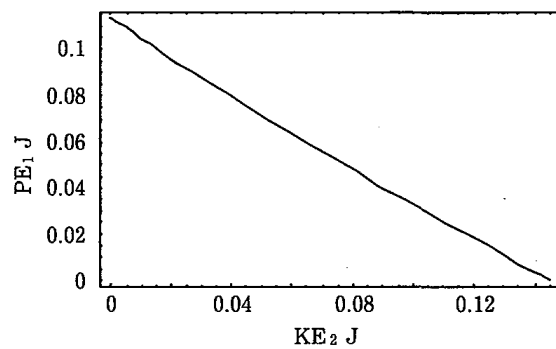


図14

振れの角度  $\theta_1$  と  $\theta_2$  の時間変化を図15と図16に示す。どちらも同周期（1.2秒）で周期的に振動していることがわかる。

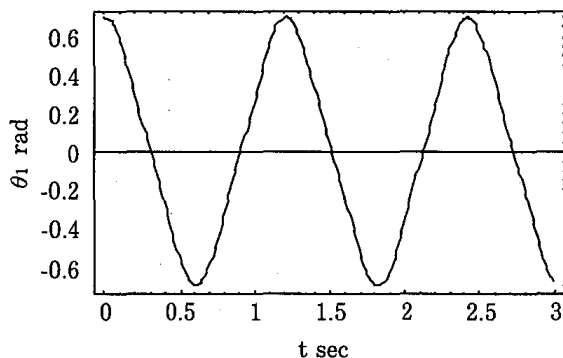


図15

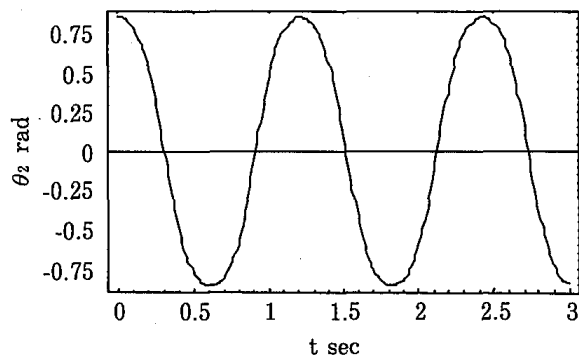


図16

図17は、 $\theta_1(0)=40^\circ$ 、 $\theta_2(0)=49.1^\circ$ 、 $p_{\theta_1}(0)=p_{\theta_2}(0)=0$  に対して、時間刻み0.03秒で2つのおもりの運動をシミュレートした結果である。A.の場合と同様、 $\theta_1$  と  $\theta_2$  は同位相、同周期（1.2秒）で振動することがわかる。

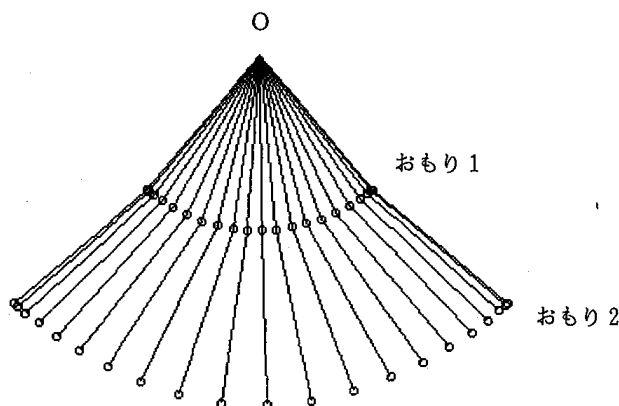


図17

### C. $\theta_1(0)=10^\circ$ 、 $\theta_2(0)=14.1^\circ$ の場合

A., B.の場合と比較して、初期角度  $\theta_1(0)$  と  $\theta_2(0)$  はさらに小さい角である（ $\theta_2(0)$  は正確には  $10\sqrt{2}^\circ$  である）。この場合、2つの振り子の振れの角度（ $\theta_1, \theta_2$ ）は、図18の軌道図からわかるように、直線的に変化することがわかる。図2と図12の角度（ $\theta_1, \theta_2$ ）の変化が曲線的すなわち非線形的であったこととは対照的に図18の角度（ $\theta_1, \theta_2$ ）の変化は線形的である。

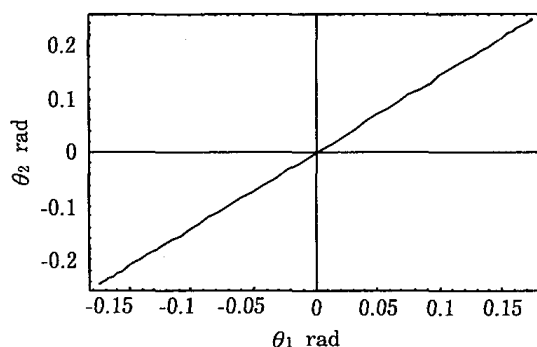


図18

この線形性は、おもり1とおもり2の運動エネルギー (KE) と位置エネルギー (PE) の時間経過にともなう変化 (図19と図20) にもみられる。この場合、2つのおもりは静かに手放されてから最下点まで徐々に加速され、その後最下点を通過して手放した位置とは y 軸に関して対称な位置まで徐々に減速される。その後、逆の経路をたどって手放した位置まで戻る。つまり、2つのおもりは、単位時間あたり減少する角度が比例するように、調子を合わせて、角度を減少しながら手放した位置とは y 軸に関して対称な位置まで到達する。

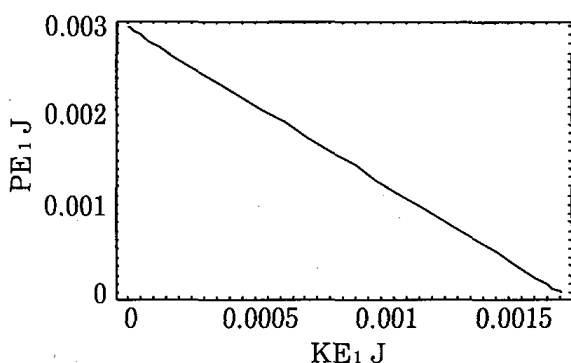


図19

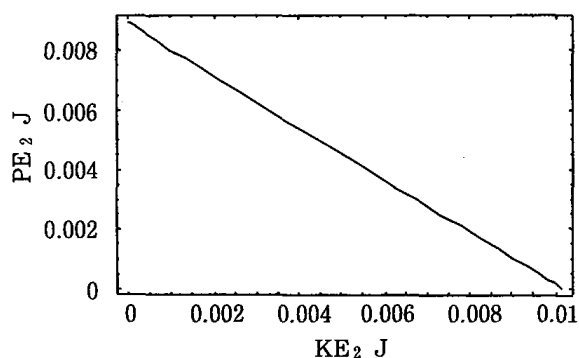


図20

この初期角度対  $(\theta_1(0), \theta_2(0)) = (10^\circ, 14.1^\circ)$  に対しては、微小振動理論の結果がよい近似を与える。 $\theta_1 \ll 1, \theta_2 \ll 1$  として運動方程式 (付録2の(a12)と(a13)) を線形化し  $l_1 = l_2 = l, m_1 = m_2 = m$  とするとき、次を得る。

$$2ml\dot{\theta}_1 + ml\dot{\theta}_2 + 2mg\theta_1 = 0, \quad l\ddot{\theta}_1 + l\ddot{\theta}_2 + g\theta_2 = 0 \quad (6)$$

式(6)で  $\theta_2 = c\theta_1$  ( $c$  は定数) とおくと、

$$c = \pm\sqrt{2} \quad (7)$$

を得る。 $c = \sqrt{2}$  が現在の場合 (C.) であり、 $\theta_2 = \sqrt{2}\theta_1$  となることがわかる。

$c = -\sqrt{2}$  は後で考察する (F.) の場合である。

微小振動理論により、 $l_1 = l_2 = l$ ,  $m_1 = m_2 = m$  とおくととき角振動数は次で表される。

$$\omega^2 = (2 \pm \sqrt{2}) \frac{g}{l} \quad (8)$$

$\omega = \sqrt{(2 - \sqrt{2}) \frac{g}{l}}$  が現在の場合 (C.) であり、 $l = 0.2\text{m}$ ,  $g = 9.8\text{m/s}^2$  を代入するとき、 $\omega = 5.36\text{rad/s}$  を得る。したがって、周期  $T$  は  $T = 1.17\text{s}$  となる。

$\omega = \sqrt{(2 + \sqrt{2}) \frac{g}{l}}$  は後で考察する (F.) の場合である。

振れの角度  $\theta_1$  と  $\theta_2$  の時間変化を図21と図22に示す。どちらも同周期 (1.17秒) で周期的に振動しており、微小振動理論の結果とよい一致を示す。

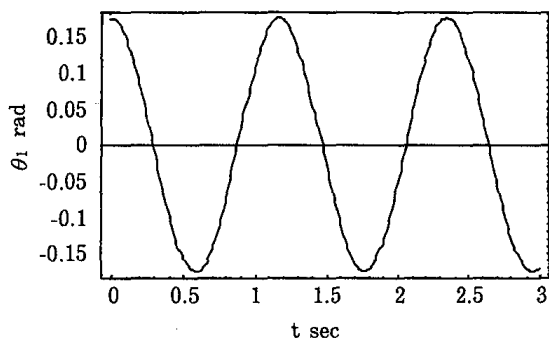


図21

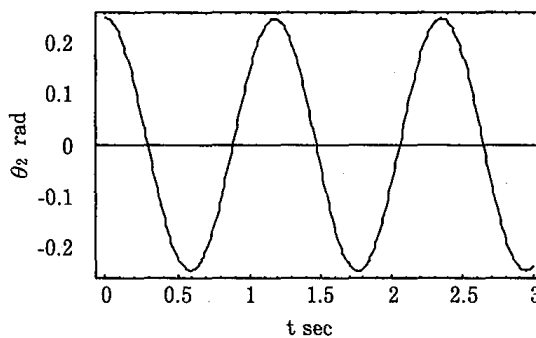


図22

図23は、 $\theta_1(0) = 10^\circ$ ,  $\theta_2(0) = 14.1^\circ$ ,  $p_{\theta_1}(0) = p_{\theta_2}(0) = 0$  に対して、時間刻み0.05秒で、2つの振り子の運動をシミュレートした結果である。 $\theta_1$  と  $\theta_2$  は同位相、同周期 (1.17秒) で振動することがわかる。また、最初の半周期に着目すると、2つの振り子は単位時間あたりの減少角が比例するように右から左へ振動していると推測できる。

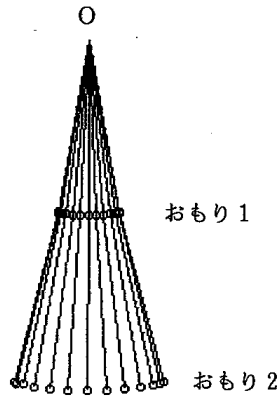


図23

D.  $\theta_1(0)=63.95^\circ$ ,  $\theta_2(0)=-63.95^\circ$  の場合

A.からC.は2つの振り子が同じ向きに振動する場合であったが、これから以降は2つの振り子が逆向きに振動する場合である。

A.と同様、初期角度  $\theta_1(0)$  と  $\theta_2(0)$  の絶対値は等しいが向きが逆の場合である。2つの振り子の振れの角度 ( $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ) の軌道図 (図24) からわかるように、2つの振り子の振れの角度の点 ( $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ) は時間の経過にともない、2つのおもりを静かに手放した右下 ( $\theta_1=63.95^\circ=1.116\text{rad}$ ,  $\theta_2=-63.95^\circ=-1.116\text{rad}$ ) から  $\theta_1=\theta_2=0^\circ=0\text{rad}$  を通り、左上 ( $\theta_1=-63.95^\circ=-1.116\text{rad}$ ,  $\theta_2=63.95^\circ=1.116\text{rad}$ ) まで、そして左上から右下へと周期的に変化する。しかも軌道は完全に対称的である。軌道の非線形的な振る舞いは、A.の場合と同様、おもり1とおもり2の運動エネルギー (KE) と位置エネルギー (PE) の時間経過にともなう変化 (図25と図26) から説明できる。

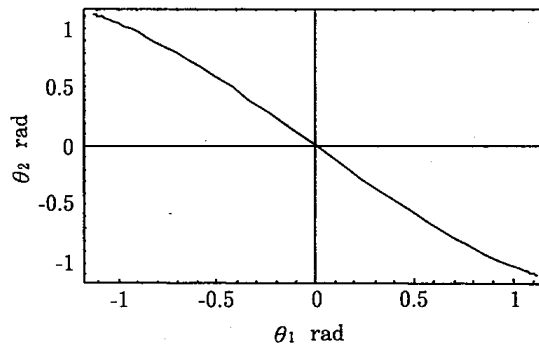


図24

おもり1の運動エネルギーと位置エネルギーの点 ( $KE_1$ ,  $PE_1$ ) は、おもり1

を静かに手放した位置に対応する左上 ( $KE_1=0\text{ J}$ ,  $PE_1=0.11\text{ J}$ ) から、ほぼ単調な曲線上を、右下 ( $KE_1=0.31\text{ J}$ ,  $PE_1=0\text{ J}$ ) まで変化し、言い換えると、おもり 1 は運動エネルギーの増加に伴い徐々に加速され最下点まで到達し、その後、左上 ( $KE_1=0\text{ J}$ ,  $PE_1=0.11\text{ J}$ ) まで逆の経路をたどって戻る、すなわち、おもり 1 は運動エネルギーの減少に伴い徐々に減速されおもり 1 を手放した位置とは  $y$  軸に関して対称な位置に到達する (図25)。一方、おもり 2 の運動エネルギーと位置エネルギーの点 ( $KE_2$ ,  $PE_2$ ) は、折れ曲がったなめらかな曲線上を、まず、左上 ( $KE_2=0\text{ J}$ ,  $PE_2=0.22\text{ J}$ ) から右端 ( $KE_2=0.13\text{ J}$ ,  $PE_2=0.06\text{ J}$ ) まで変化し、言い換えると、おもり 2 は運動エネルギーの増加に伴い徐々に加速され最下点の手前で最大速度に達し、次に、左 ( $KE_2=0.015\text{ J}$ ,  $PE_2=0\text{ J}$ ) まで変化し、すなわち、おもり 2 は運動エネルギーの減少に伴い徐々に減速され最下点まで達し、さらにその後、この経路を逆にたどって左上 ( $KE_2=0\text{ J}$ ,  $PE_2=0.22\text{ J}$ ) へ戻る、すなわち、おもり 2 は運動エネルギーの増加に続く減少を経て、つまりおもり 2 の徐々に加速に続く減速を経て、おもり 2 を手放した位置とは  $y$  軸に関して対称な位置に到達する (図26)。

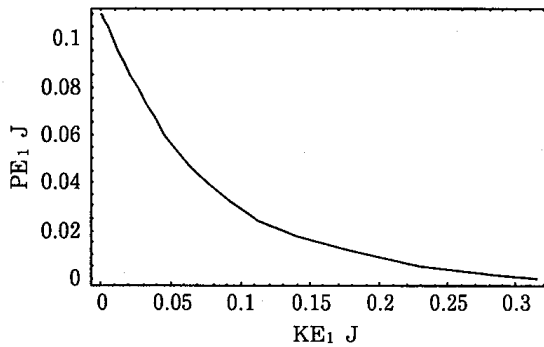


図25

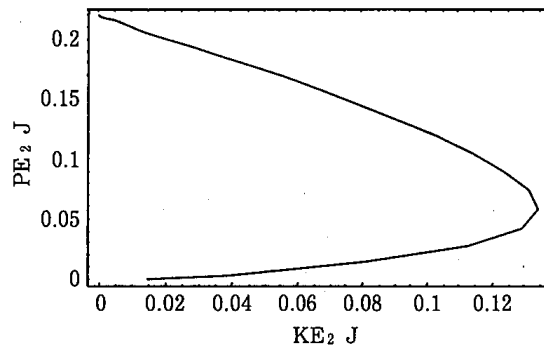


図26

振れの角度  $\theta_1$  と  $\theta_2$  の時間変化を図27と図28に示す。どちらも同周期 (0.92 秒) で周期的に振動していることがわかる。



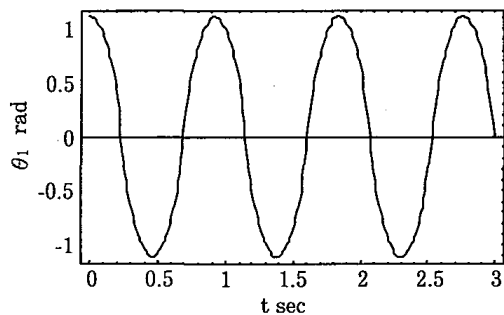


図27

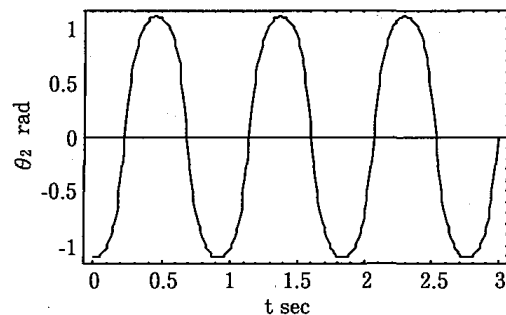


図28

図29は、 $\theta_1(0)=63.95^\circ$ ,  $\theta_2(0)=-63.95^\circ$ ,  $p_{\theta_1}(0)=p_{\theta_2}(0)=0$  に対して、時間刻み0.015秒で2つの振り子の運動をシミュレートした結果である。また、図30は、おもり2の運動をわかりやすくするために $\frac{1}{4}$ 周期にわたってシミュレートした結果である。おもり2を静かに手放した位置からおもり2が徐々に加速され、その後徐々に減速されて最下点に達する様子が見て取れる。

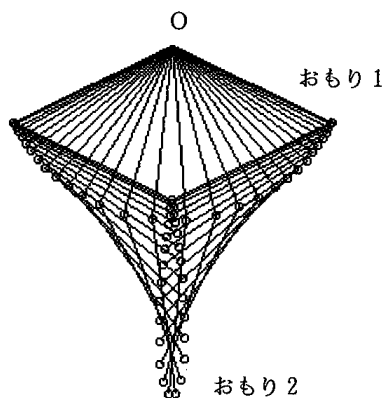


図29

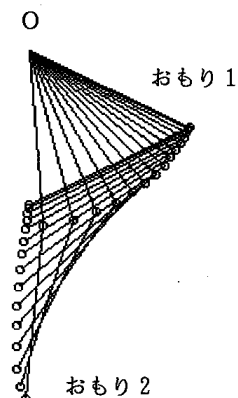


図30

E.  $\theta_1(0)=40^\circ$ ,  $\theta_2(0)=-51.2^\circ$  の場合

D.の場合と比較して、初期角度  $\theta_1(0)$  と  $\theta_2(0)$  との絶対値が小さい場合である。この場合、2つの振り子の振れの角度 ( $\theta_1, \theta_2$ ) は、図31の軌道図を見る限り直線的に変化するように思える。

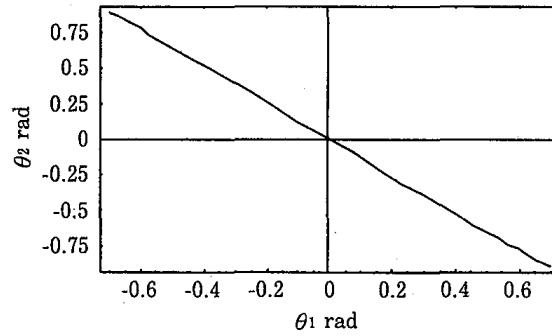


図31

しかし、おもり1とおもり2の運動エネルギー (KE) と位置エネルギー (PE) の時間経過にともなう変化 (図32と図33) の様子から、おもり1は運動エネルギーの増加に伴い徐々に加速され最下点まで到達するのに対して、おもり2は運動エネルギーの増加に伴い最下点の手前まで徐々に加速され、その後、運動エネルギーの減少に伴い徐々に減速されて最下点まで到達する。したがって、振れの角度 ( $\theta_1, \theta_2$ ) はなめらかな曲線上を変化すると考えるべきである。実際、より詳しく調べると、直線からわずかにずれた曲線であることがわかる。

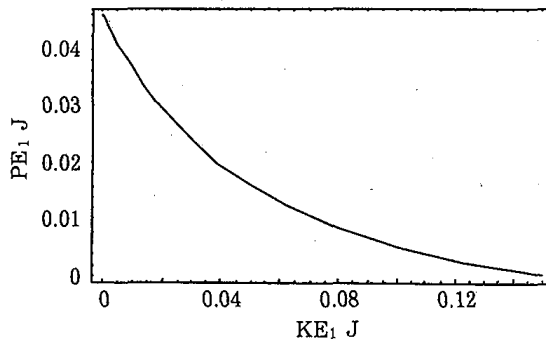


図32

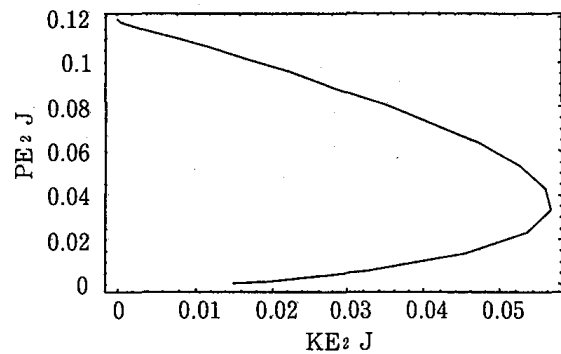


図33

振れの角度  $\theta_1$  と  $\theta_2$  の時間変化を図34と図35に示す。どちらも同周期 (0.75 秒) で周期的に振動していることがわかる。

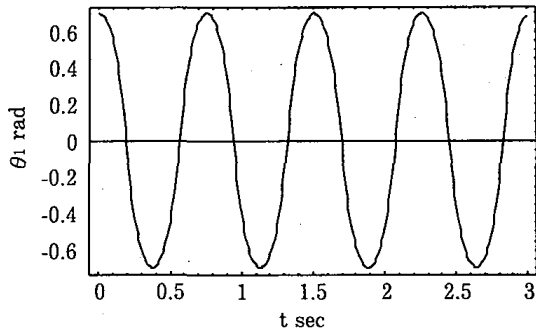


図34

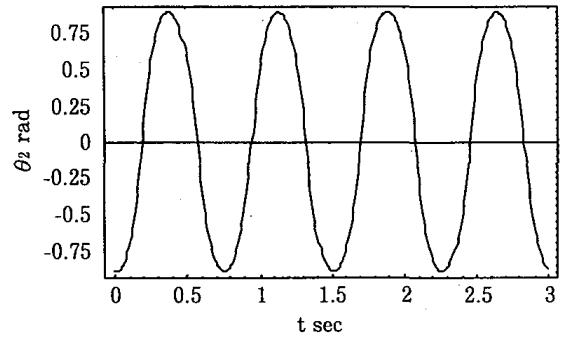


図35

図36は、 $\theta_1(0)=40^\circ$ 、 $\theta_2(0)=-51.2^\circ$ 、 $p_{\theta_1}(0)=p_{\theta_2}(0)=0$  に対して、時間刻み 0.015秒で2つの振り子の運動をシミュレートした結果である。おもり2を静かに手放した位置からおもり2が徐々に加速され、その後徐々に減速されて最下点に達する様子が見て取れる。

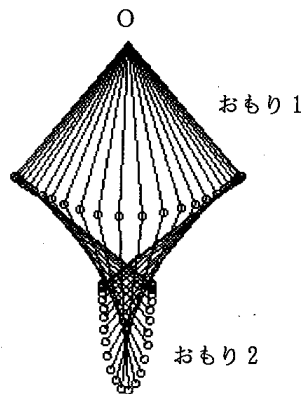


図36

#### F. $\theta_1(0)=10^\circ$ 、 $\theta_2(0)=-14.1^\circ$ の場合

C.の場合と初期角度  $\theta_1(0)$  と  $\theta_2(0)$  の絶対値が等しい場合である ( $\theta_2(0)$  は正確には  $-10\sqrt{2}^\circ$  である)。2つの振り子の振れの角度 ( $\theta_1, \theta_2$ ) は、図37の軌道図からわかるように、直線的に変化するように思える。しかし、この場合も E.の場合と同様、厳密には、直線からわずかにずれた曲線であると考えべきである。それはおもり1とおもり2の運動エネルギー (KE) と位置エネルギー (PE) の時間経過にともなう変化 (図38と図39) の様子と E.の場合と同様な考察からわかる。

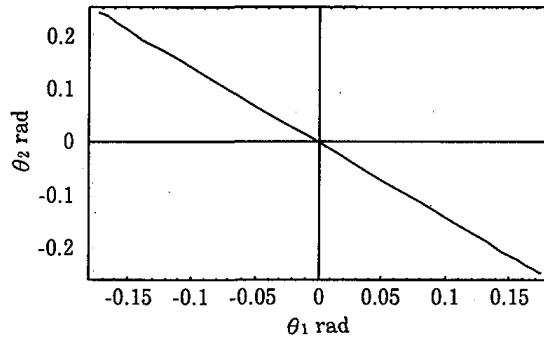


図37

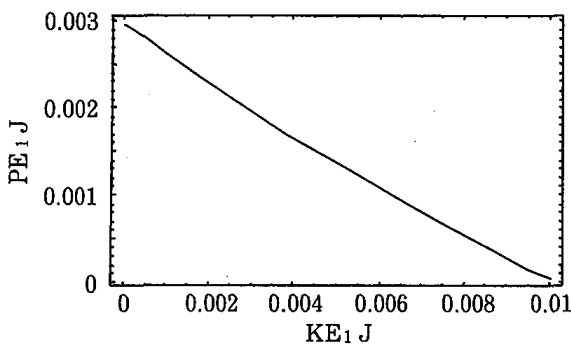


図38

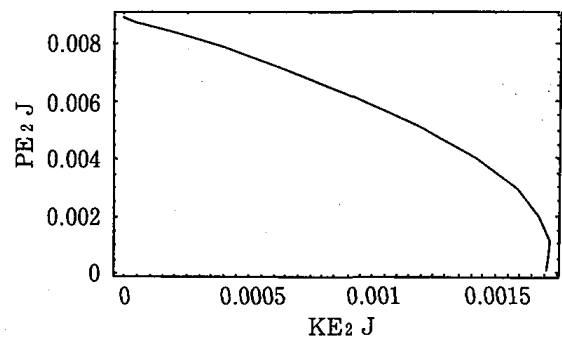


図39

振れの角度  $\theta_1$  と  $\theta_2$  の時間変化を図40と図41に示す。どちらも同周期 (0.49秒) で周期的に振動していることがわかる。

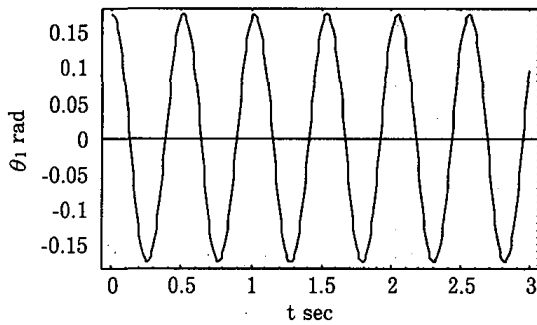


図40

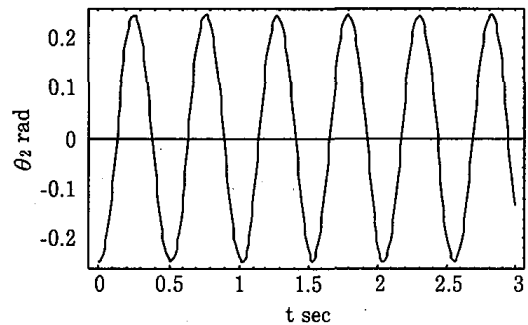


図41

この場合、微小振動理論が周期  $T$  に対してよい近似値を与える。式(8)から、

$$\omega = \sqrt{(2 + \sqrt{2}) \frac{g}{l}} \quad (9)$$

である。 $l=0.2\text{m}$ ,  $g=9.8\text{m/s}^2$  を代入するとき、 $\omega=12.93\text{rad/s}$  を得る。したがって、周期  $T$  は  $T=0.49\text{s}$  となり上述の結果とよい一致を得る。

図42は、 $\theta_1(0)=10^\circ$ ,  $\theta_2(0)=-14.1^\circ$ ,  $p_{\theta_1}(0)=p_{\theta_2}(0)=0$  に対して、時間刻み 0.03秒で2つの振り子の運動をシミュレートした結果である。 $\theta_1$  と  $\theta_2$  は同位相、同周期 (0.49秒) で振動することがわかる。また、最初の半周期に着目すると、振り子1の単位時間あたりの減少角と振り子2の単位時間あたりの増加角がほぼ比例するように、おもり1は右から左へ、おもり2は左から右へ振動していると推測できる。



図42

## 5. 二重振り子の初期角度が極端に大きい場合

### $(\theta_1(0)=170^\circ, \theta_2(0)=180^\circ)$ の数値シミュレーション

この節では、二重振り子の2つの振り子の初期角度が極端に大きい場合の2つのおもりのカオス的な振る舞いを考察する。図43は、2つのおもりを静かに手放した位置 ( $\theta_1=170^\circ=2.97\text{rad}$ ,  $\theta_2=180^\circ=3.14\text{rad}$ ) から5秒間にわたる  $\theta_1$  と  $\theta_2$  の位相平面における軌道である。2つの振り子の振れの角度の点  $(\theta_1, \theta_2)$  は、時間の経過にともない、不規則に振る舞うことがわかる。

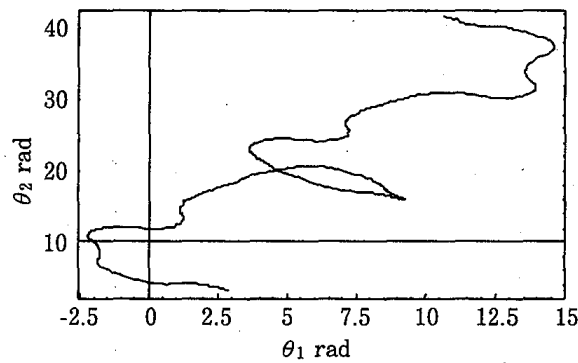


図43

振れの角度  $\theta_1$  と  $\theta_2$  の時間変化を図44と図45に示す。どちらの振子も大きい振幅で振動し、宙返りさえも行うことがわかる。例えば、おもり1については、 $t=1.56, 3.98$ 秒において、そしておもり2については、 $t=0.81, 1.40, 2.30, 3.12, 3.84, 4.48, 4.98$ 秒においてである。

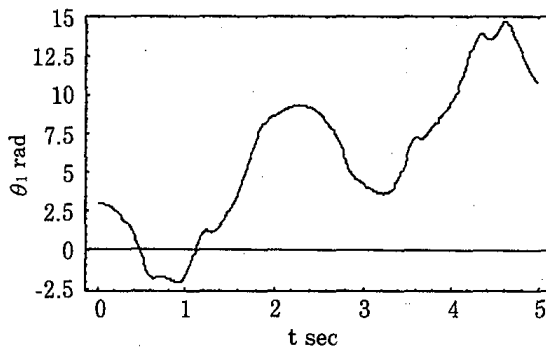


図44

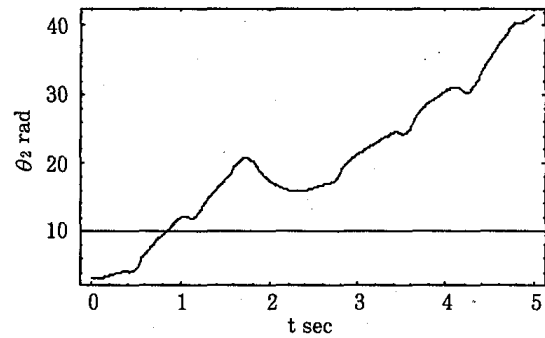


図45

おもり1とおもり2の位置エネルギーの時間変化を図46と図47に示す。おもり1の宙返りは、予期されるように、おもり1の位置エネルギーが最大値(0.39 J)になったとき生ずることがわかる。一方、おもり2の宙返りは、おもり2の位置エネルギーの極大値近傍で生ずることがわかる。

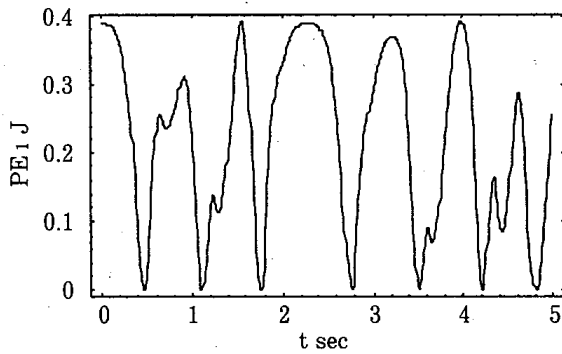


図46

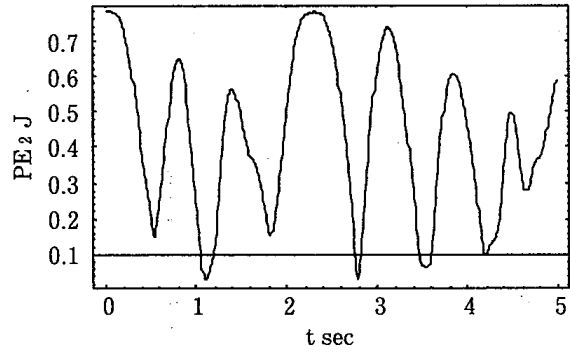


図47

初期角度が極端に大きい場合の二重振り子の運動が厳密にカオスであるという数学的証明は、まだ、なされていない。<sup>2)</sup> しかし、カオスにはそれを特徴づけるいくつかの数理的性質がある。その1つ「初期値に対する鋭敏な依存性」を現在の場合について考察する。「初期値に対する鋭敏な依存性」とは初期値の微小なずれ  $d(0)$  が次式であらわされるように時間  $t$  とともに指数関数的に増幅されることを意味する。

$$d(t) \approx d(0) e^{\lambda t} \quad (10)$$

ここで、 $\lambda$  はある正の定数（リアプノフ指数）である。

二重振り子に対して、 $d(t)$  は時刻  $t$  における2つの振り子の状態の位相空間  $(\theta_1, \theta_2, p_{\theta_1}, p_{\theta_2})$  における2点間の距離と定義される。

$$d(t) = \sqrt{(\phi_1 - \phi_1')^2 + (\phi_2 - \phi_2')^2 + (p_{\phi_1} - p_{\phi_1}')^2 + (p_{\phi_2} - p_{\phi_2}')^2} \quad (11)$$

ここで、 $\phi_1, \phi_2, p_{\phi_1}, p_{\phi_2}$  と  $\phi_1', \phi_2', p_{\phi_1}', p_{\phi_2}'$  は時刻  $t$  におけるおもり1とおもり2の位相空間における値である。

数値シミュレーションは初期値  $(\phi_1(0), \phi_2(0), p_{\phi_1}(0), p_{\phi_2}(0)) = (170^\circ, 180^\circ, 0, 0)$  とこの初期値にきわめて近い初期値  $(\phi_1(0), \phi_2(0), p_{\phi_1}(0), p_{\phi_2}(0)) = (170.000001^\circ, 179.999999^\circ, 0, 0)$  でもって4秒間行われた。その結果を図48（片対数グラフ）に示す。図48に示される曲線は明らかに上向き傾向を示している。 $t=0$  の点を通る直線によって荒っぽい近似を行うとき、 $\lambda = 2.9 \text{ s}^{-1}$  を得る。したがって、指数はカオス的に振る舞うシステムに対して期待されるように正である。よって、初期角度が極端に大きい場合の二重振り子の運動系はカオス的な振る舞いをすると考えられる。

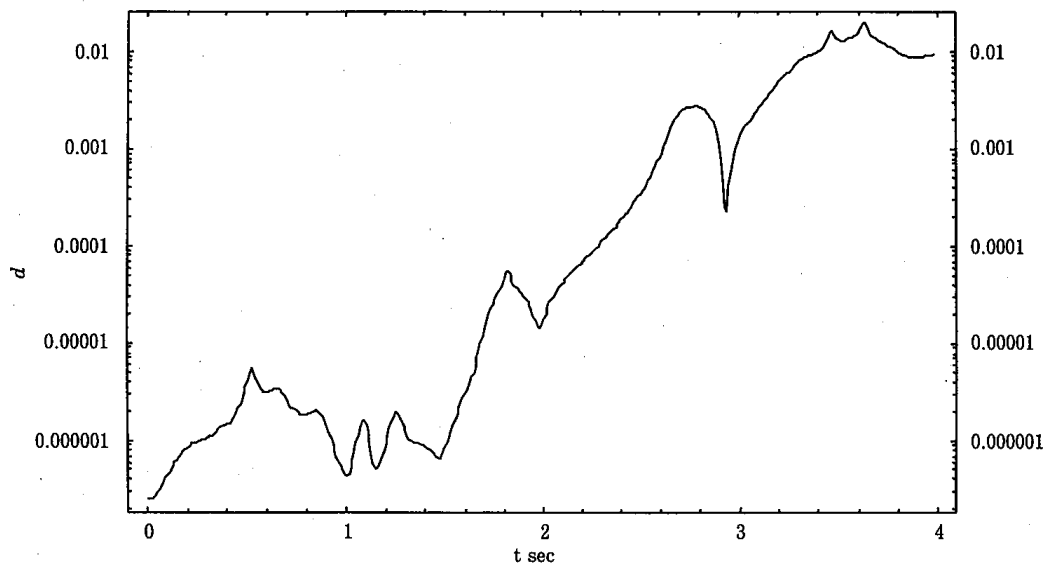


図48

図49は、 $\theta_1(0)=170^\circ$ ,  $\theta_2(0)=180^\circ$ ,  $p_{\theta_1}(0)=p_{\theta_2}(0)=0$  に対して、時間刻み0.01秒で2つの振り子の運動をシミュレートした結果である。おもり1はその振幅を変えながら振動するが半径0.2mの円周上に限定されている。一方、おもり2はその振幅を変えながら、時折、宙返りを通して投げ出されながら振動することがわかる。

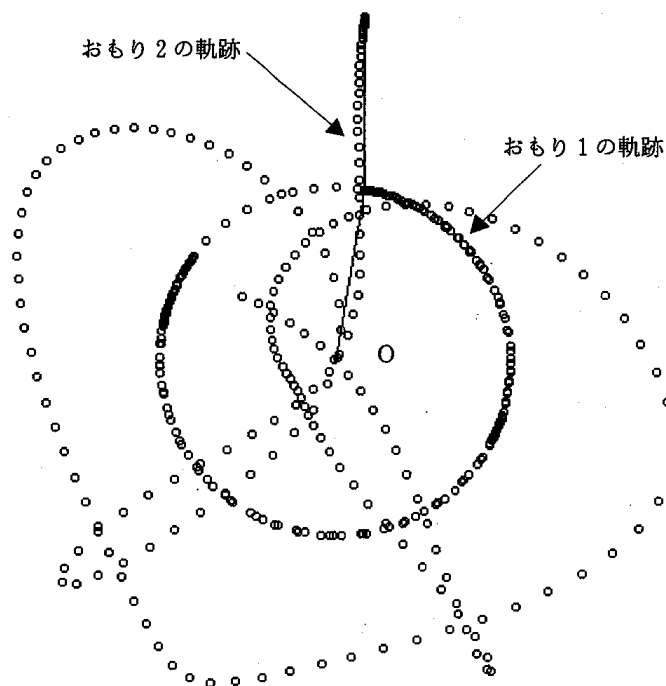


図49



## 引用文献

- 1) Daniel R. Stump. Solving classical mechanics problems by numerical integration of Hamilton's equations. Am. J. Phys. 54 (12), December 1986
- 2) Dan Schwalbe and Stan Wagon. *VisualDSolve*. Springer-Verlag, New York, Inc. 1997

邦訳 *VisualDSolve - Mathematica* による微分方程式の視覚化 - 金田和久訳  
KAIBUNDO

## 付録 1.

おもり 1 およびおもり 2 の位置の座標をそれぞれ  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  とするとき, 各おもりの速度成分  $(\dot{x}_1, \dot{y}_1)$ ,  $(\dot{x}_2, \dot{y}_2)$  は

$$\begin{aligned}x_1 &= l_1 \sin \theta_1, & y_1 &= -l_1 \cos \theta_1 \\x_2 &= l_2 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2, & y_2 &= -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2\end{aligned}\tag{a1}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1, & \dot{y}_1 &= l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \\ \dot{x}_2 &= l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2, & \dot{y}_2 &= l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2\end{aligned}\tag{a2}$$

と表される。そのとき, 各おもりの運動エネルギーの和  $T$  と位置エネルギーの和  $U$  は

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\ &= \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left\{ l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2\end{aligned}\tag{a3}$$

$$\begin{aligned}U &= -m_1 g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2) \\ &= -(m_1 + m_2) g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g l_2 \cos \theta_2\end{aligned}\tag{a4}$$

と表される。したがって, この二重振り子の系のラグランジアン  $L$  は

$$\begin{aligned}L &= T - U \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + (m_1 + m_2) g l_1 \cos \theta_1 + m_2 g l_2 \cos \theta_2\end{aligned}\tag{a5}$$

と表される。

$\theta_1$  と  $\theta_2$  に共役な一般化運動量  $p_{\theta_1}$  と  $p_{\theta_2}$  はそれぞれ次で表される。

$$\begin{aligned}
p_{\theta_1} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} & p_{\theta_2} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \\
&= (m_1 + m_2)l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & &= m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)
\end{aligned} \tag{a6}$$

$\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$  を一般化運動量  $p_{\theta_1}, p_{\theta_2}$  を用いて表し直すと,

$$\begin{aligned}
\dot{\theta}_1 &= \frac{\frac{p_{\theta_1}}{m_1 l_1^2} - \frac{p_{\theta_2}}{m_1 l_1 l_2} \cos(\theta_1 - \theta_2)}{1 + \frac{m_2}{m_1} \sin^2(\theta_1 - \theta_2)}, \\
\dot{\theta}_2 &= \frac{\frac{p_{\theta_1}}{m_2 l_2^2} \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) - \frac{p_{\theta_1}}{m_1 l_1 l_2} (\theta_1 - \theta_2)}{1 + \frac{m_2}{m_1} \sin^2(\theta_1 - \theta_2)}
\end{aligned} \tag{a7}$$

となる。そのとき、二重振り子の系のハミルトニアン  $H$  は次で与えられる。

$$\begin{aligned}
H &= p_{\theta_1} \dot{\theta}_1 + p_{\theta_2} \dot{\theta}_2 - L \\
&= \frac{\frac{p_{\theta_1}^2}{2m_1 l_1^2} + \frac{p_{\theta_2}^2}{2m_2 l_2^2} \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) - \frac{p_{\theta_1} p_{\theta_2}}{m_1 l_1 l_2} \cos(\theta_1 - \theta_2)}{1 + \frac{m_2}{m_1} \sin^2(\theta_1 - \theta_2)} - (m_1 + m_2)gl_1 \cos \theta_1 - m_2 gl_2 \cos \theta_2
\end{aligned} \tag{a8}$$

## 付録 2.

ハミルトンの正準方程式は付録 1 の記法で,

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_{\theta_1}}, \quad \frac{d\theta_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_{\theta_2}}, \quad \frac{dp_{\theta_1}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta_1}, \quad \frac{dp_{\theta_2}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta_2} \tag{a9}$$

と表される。

二重振り子に対するハミルトニアン  $H$  の式 (a8) を式 (a9) に適用すると、次のハミルトンの正準方程式を得る。

$$\begin{aligned}
\frac{d\theta_1}{dt} &= \frac{\frac{p_{\theta_1}}{m_1 l_1^2} - \frac{p_{\theta_2}}{m_1 l_1 l_2} \cos(\theta_1 - \theta_2)}{1 + \frac{m_2}{m_1} \sin^2(\theta_1 - \theta_2)}, \\
\frac{d\theta_2}{dt} &= \frac{\frac{p_{\theta_2}}{m_2 l_2^2} \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) - \frac{p_{\theta_1}}{m_1 l_1 l_2} \cos(\theta_1 - \theta_2)}{1 + \frac{m_2}{m_1} \sin^2(\theta_1 - \theta_2)},
\end{aligned}$$

$$\frac{dp_{\theta_1}}{dt} = \frac{\left[ \left\{ \frac{p_{\theta_1}^2}{m_1 l_1^2} + \frac{p_{\theta_2}^2}{m_2 l_2^2} \left( 1 + \frac{m_2}{m_1} \right) \right\} \frac{m_2}{m_1} \cos(\theta_1 - \theta_2) - \frac{p_{\theta_1} p_{\theta_2}}{m_1 l_1 l_2} \left( 1 + \frac{m_2}{m_1} + \frac{m_2}{m_1} \cos^2(\theta_1 - \theta_2) \right) \right] \sin(\theta_1 - \theta_2)}{\left\{ 1 + \frac{m_2}{m_1} \sin^2(\theta_1 - \theta_2) \right\}^2} \quad (\text{a10})$$

$$-(m_1 + m_2)gl_1 \sin \theta_1,$$

$$\frac{dp_{\theta_2}}{dt} = \frac{\left[ \left\{ \frac{p_{\theta_1}^2}{m_1 l_1^2} + \frac{p_{\theta_2}^2}{m_2 l_2^2} \left( 1 + \frac{m_2}{m_1} \right) \right\} \frac{m_2}{m_1} \cos(\theta_1 - \theta_2) - \frac{p_{\theta_1} p_{\theta_2}}{m_1 l_1 l_2} \left( 1 + \frac{m_2}{m_1} + \frac{m_2}{m_1} \cos^2(\theta_1 - \theta_2) \right) \right] \sin(\theta_1 - \theta_2)}{\left\{ 1 + \frac{m_2}{m_1} \sin^2(\theta_1 - \theta_2) \right\}^2}$$

$$-m_2gl_2 \sin \theta_2.$$

ラグランジの方程式は付録1の記法で、

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0. \quad (\text{a11})$$

と表される。

二重振り子に対するラグランジアン  $L$  の式 (a5) を式 (a11) に適用すると、次のラグランジの運動方程式を得る。

$$(m_1 + m_2)l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)g \sin \theta_1 = 0 \quad (\text{a12})$$

$$m_2 l_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 + m_2 g \sin \theta_2 = 0 \quad (\text{a13})$$

### 付録3.

\*\*\*\*\*  
 二重振り子の運動(4次のルンゲークッタ法による解法)  
 \*\*\*\*\*

$l=0.2\text{m}, m_1=0.1\text{kg}, m_2=0.1\text{kg}, m_2/m_1=1, g=9.8\text{m/s}^2$

$\theta_1(0)=\theta_2(0)=64.3^\circ, p_{\theta_1}(0)=p_{\theta_2}(0)=0$

時間刻み 0.001(s), 繰り返し回数3000回

-----  
 プログラム開始  
 -----

Si[x\_,y\_]:=Sin[x-y];

Co[x\_,y\_]:=Cos[x-y];

Bb[x\_,y\_]:=1+mu\*Si[x,y]^2;

Bs[x\_,y\_,z\_,w\_]:=((z^2/mass1+w^2\*(1+mu)/mass2)\*mu\*Co[x,y]-z\*w\*(1+mu+mu\*Co[x,y]^2)/mass1)  
 \*Si[x,y]/l^2;

```

F1[x_,y_,z_,w_]:= (z-w*Co[x,y])/(mass1*l^2*Bb[x,y]);
F2[x_,y_,z_,w_]:= (w*(1+mu)/mass2-z*Co[x,y]/mass1)/(l^2*Bb[x,y]);
F3[x_,y_,z_,w_]:= Bs[x,y,z,w]/Bb[x,y]^2-(mass1+mass2)*9.8*Sin[x];
F4[x_,y_,z_,w_]:= -Bs[x,y,z,w]/Bb[x,y]^2-mass2*9.8*Sin[y];
{h,t,u1,u2,u3,u4,l,mass1,mass2,mu,kaisu,nn,m}={0.001,0,3.14*64.3/180,3.14*64.3/180,0,0,0.2,0.1,0.1,1,3000,0,-1};
While[t<=kaisu*h,{If[Mod[nn,10]==0,m++;theta1[m]=u1;theta2[m]=u2,Goto[nt]];Label[nt];
  j1=h*F1[u1,u2,u3,u4];
  k1=h*F2[u1,u2,u3,u4];
  l1=h*F3[u1,u2,u3,u4];
  m1=h*F4[u1,u2,u3,u4];
  j2=h*F1[u1+j1/2,u2+k1/2,u3+l1/2,u4+m1/2];
  k2=h*F2[u1+j1/2,u2+k1/2,u3+l1/2,u4+m1/2];
  l2=h*F3[u1+j1/2,u2+k1/2,u3+l1/2,u4+m1/2];
  m2=h*F4[u1+j1/2,u2+k1/2,u3+l1/2,u4+m1/2];
  j3=h*F1[u1+j2/2,u2+k2/2,u3+l2/2,u4+m2/2];
  k3=h*F2[u1+j2/2,u2+k2/2,u3+l2/2,u4+m2/2];
  l3=h*F3[u1+j2/2,u2+k2/2,u3+l2/2,u4+m2/2];
  m3=h*F4[u1+j2/2,u2+k2/2,u3+l2/2,u4+m2/2];
  j4=h*F1[u1+j3,u2+k3,u3+l3,u4+m3];
  k4=h*F2[u1+j3,u2+k3,u3+l3,u4+m3];
  l4=h*F3[u1+j3,u2+k3,u3+l3,u4+m3];
  m4=h*F4[u1+j3,u2+k3,u3+l3,u4+m3];
  u1=u1+(j1+2*j2+2*j3+j4)/6;
  u2=u2+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
  u3=u3+(l1+2*l2+2*l3+l4)/6;
  u4=u4+(m1+2*m2+2*m3+m4)/6;
  t+=h;nn++;}];
Print[" $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 64.3^\circ$ "]
ListPlot[Table[{theta1[i],theta2[i]},{i,0,299}],PlotRange->All,PlotJoined->True,Frame->True,
  FrameLabel->{" $\theta_1$  (rad)", " $\theta_2$  (rad)"}]

```