軸対称ノズル内の遷音速流れ

山　口　　　　巖

Transonic Flow in Axially-symmetric Nozzles

Iwao YAMAGUCHI

Abstract

The theory expanded by Adamson, Messiter and Richey in the study for two-dimensional transonic nozzle flows is applied to the case of axially symmetric flow. The methods of matched asymptotic expansions are used to analyse the flow which changes from subsonic flow upstream to supersonic flow downstream of the throat with continuous velocity. When an outer solution, which may not be uniformly valied as the throat is approached, is matched with an inner similarity solution which satisfies the transonic small disturbance equation in a small region at the throat, conditions on the outer solution are obtained. Using the results of matching, it is also shown that the second order inner solution are able to derive systematically for a specified wall shape from higher order outer solutions without solving the second order inner equation explicitly.

1. 緒言と要約

収縮一拡大ノズルのスロート近傍の遷音速流に対して，すでに，多くの解が見出されている。よく知られた遷音速小擾乱方程式に特別な相似変換を施すことにより，ノズル流れに対する相似解が二次元の場合に対して友近と玉田[1]によって，そして軸対称の場合に対して友近と橋本[2]によって見出された。また，二次元および軸対称の場合に対して，スロート領域での速度の大きさと流れの向きが R（スロート半値幅を1としたときのスロートにおけるノズル壁の曲率半径）の逆冪の級数として，Hall[3]によって見出された。

一方，Szaniawski[4]は二次元の場合に対して，速度ポテンシャルがy座標の冪とノズル中心線にそうx座標の関数を含む係数を伴って，小パラメータの冪級数に展開できると仮定した。そしてこの級数を一般のポテンシャル方程式と境界条件に代入することにより展開係数を逐次決定している。Adamson, Messiter and Richey[5]はより系統的な方法で，Szaniawski解[4]を導出した。そして，この解はある場合においてスロート近傍で一様に有効ではなくなるところの外部解と考えるべきであることを示した。さらに彼等はこの外部Szaniawski解[4]は内部相似解（友近と玉田の解[1]）と漸近的に接合されることを示した。

本論文では，Adamson, Messiter and Richeyの方法[5]が軸対称遷音速ノズル流れに適用され，ある特別な流れパターン（連続的な速度を伴ってスロート上流での亜音速流から下流での超音速流へ変化する流れ）に対する外部解が導出される。そして，この外部解と内部相似解（友近と橋本の解[2]）との接合を通して外部解に置かれるべき条件が見出される。最後に，接合の結果を踏まえてある指定された壁の形に対して，第二オーダー内部解が第二オーダー内部方程式を陽に解くことなしに，高次オーダーの外部解から系統的に導出できることが示される。そして，そのようにして得られた第二オーダー内部解はHallによって得られた解[3]と完全に一致することが示される。

2. 外部領域での定式化

軸対称な収縮—拡大ノズルに対して座標原点はノズルスロートの中心に取られる。xとrはそれぞれ，ノズルの中心線にそうて下流方向に，そしてそれに

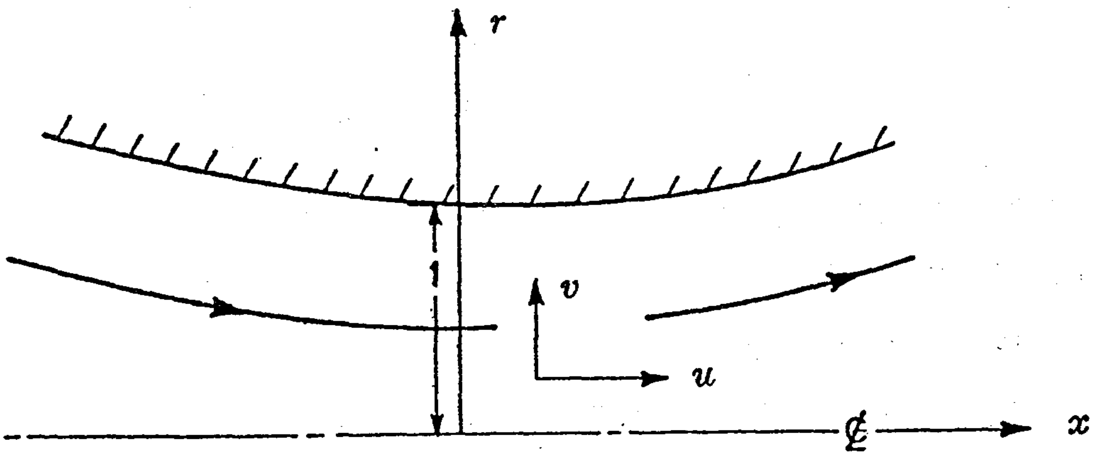

図1 ノズル流れの座標系

垂直に測られた無次元座標であり，スロート半値幅$\bar{L}$によって無次元化されている。（図１）ここで，バーは有次元量を表す。

一定比熱を伴う完全気体の非粘性流れが考察される。そして流れは定常，非回転であると仮定される。そのとき，スロート半値幅$\bar{L}$と臨界音速$\bar{a}^*$の積$\bar{L}\bar{a}^*$で無次元化された速度ポテンシャルが$\Phi(x, r)$で定義されるならば，ベルヌーイの方程式といわゆる気体力学方程式は次で与えられる。

$$\text{(1a)} \qquad \frac{a^2}{\gamma-1}+\frac{1}{2}(\Phi_x{}^2+\Phi_r{}^2)=\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}$$

$$\text{(1b)} \qquad (a^2-\Phi_x{}^2)\,\Phi_{xx}-2\Phi_x\Phi_r\Phi_{xr}+(a^2-\Phi_r{}^2)\,\Phi_{rr}+a^2\frac{1}{r}\Phi_r=0$$

ここで，aは$\bar{a}^*$で無次元化された局所音速であり，γは比熱比である。

さて，この節ではノズルスロートから$x=O(1)$の領域（外部領域）において流速がどこでもほとんど音速であるような流れが考察される。それゆえ，次で定義される摂動ポテンシャルϕが導入される。

$$\text{(2)} \qquad u=\Phi_x=1+\phi_x, \qquad v=\Phi_r=\phi_r$$

ここで，uとvはそれぞれ，$\bar{a}^*$で無次元化されたxとr方向の速度成分である。そしてϕ_xとϕ_rはそれぞれ，摂動速度のxとr成分であり，$\phi_x, \phi_r \ll 1$である。そのとき，(1a)，(1b)はϕに対して次式を与える。

$$\text{(3)} \qquad \frac{1}{r}(r\phi_r)_r=(\gamma+1)\,\phi_x\phi_{xx}+2\phi_r\phi_{xr}+(\gamma-1)\,\phi_x\frac{1}{r}(r\phi_r)_r$$
$$+\frac{\gamma+1}{2}\phi_x{}^2\phi_{xx}+2\phi_x\phi_r\phi_{xr}+\frac{\gamma-1}{2}\phi_x{}^2\frac{1}{r}(r\phi_r)_r$$
$$+\frac{\gamma-1}{2}\phi_r{}^2\,\phi_{xx}+\frac{\gamma+1}{2}\phi_r{}^2\frac{1}{r}(r\phi_r)_r-\frac{1}{r}\phi_r{}^3$$

流速が外部領域においてどこでもほとんど音速であることから，ノズル壁の形$r_w(x)$は次で表される。

$$\text{(4)} \qquad r_w=1+wf(x)$$

ここで，$f(0)=f'(0)=0,\ f''(0)>0$であり，$w\ll 1$と仮定する。
そのとき，ノズル壁での接線条件は次を与える。

(5) $r=r_w$ で, $\dfrac{\phi_r}{1+\phi_x}=\dfrac{dr_w}{dx}$

また, 流れの軸対称性条件は次で与えられる。

(6) $r=0$ で, $\phi_r=0$

ϕ が小パラメータ E によって次の如く漸近展開できると仮定されるならば,

(7) $\phi(x,\ r;\ E)=E\phi_1(x,\ r)+E^2\phi_2(x,\ r)+E^3\phi_3(x,\ r)+\cdots$

u と v はそれぞれ, 次で表される。

(8a) $u=1+E\phi_{1x}+E^2\phi_{2x}+E^3\phi_{3x}+\cdots$

(8b) $v=E\phi_{1r}+E^2\phi_{2r}+E^3\phi_{3r}+\cdots$

ここで, E はノズルスロートから距離 $x=O(1)$ での流速と音速の典型的な差の目安を与える小パラメータである。

(7) の (3) への代入は ϕ_n $(n\geqq 1)$ に対して以下の支配方程式を導く。

(9) $\dfrac{1}{r}(r\phi_r)=0$

(10) $\dfrac{1}{r}(r\phi_{nr})_r=\psi_{n-1}$ $(n\geqq 2)$

ここで, ψ_n は ϕ_1, $\phi_2,\cdots$, ϕ_n のみの関数であり, 引き続く解析において必要とされるオーダーまでで, ψ_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ は次の如く与えられる。

(11) $\psi_1=(\gamma+1)\phi_{1x}\phi_{1xx}+2\phi_{1r}\phi_{1xr}$

(12) $$\psi_2=(\gamma+1)(\phi_{2x}\phi_{1xx}+\phi_{1x}\phi_{2xx})+2(\phi_{2r}\phi_{1xr}+\phi_{1r}\phi_{2xr})$$
$$+(\gamma-1)\phi_{1x}\frac{1}{r}(r\phi_{2r})_r+\frac{\gamma+1}{2}\phi_{1x}{}^2\phi_{1xx}+2\phi_{1x}\phi_{1r}\phi_{1xr}$$
$$+\frac{\gamma-1}{2}\phi_{1r}{}^2\phi_{1xx}-\frac{1}{r}\phi_{1r}{}^3$$

(13) $$\psi_3=(\gamma+1)(\phi_{3x}\phi_{1xx}+\phi_{2x}\phi_{2xx}+\phi_{1x}\phi_{3xx})$$
$$+2(\phi_{3r}\phi_{1xr}+\phi_{2r}\phi_{2xr}+\phi_{1r}\phi_{3xr})$$
$$+(\gamma-1)\left\{\phi_{2x}\frac{1}{r}(r\phi_{2r})_r+\phi_{1x}\frac{1}{r}(r\phi_{3r})_r\right\}$$

$$+\frac{\gamma+1}{2}(\phi_{1x}{}^2\phi_{2xx}+2\phi_{1x}\phi_{2x}\phi_{1xx})$$

$$+2\left\{\phi_{1x}\phi_{1r}\phi_{2xr}+(\phi_{2x}\phi_{1r}+\phi_{1x}\phi_{2r})\phi_{1xr}\right\}$$

$$+\frac{\gamma-1}{2}\phi_{1x}{}^2\frac{1}{r}(r\phi_{2r})_r+\frac{\gamma-1}{2}(\phi_{1r}{}^2\phi_{2xx}+2\phi_{1r}\phi_{2r}\phi_{1xx})$$

$$+\frac{\gamma+1}{2}\phi_{1r}{}^2\frac{1}{r}(r\phi_{2r})_r-\frac{3}{r}\phi_{1r}{}^3\phi_{2r}$$

(14) $$\phi_4=(\gamma+1)(\phi_{4x}\phi_{1xx}+\phi_{3x}\phi_{2xx}+\phi_{2x}\phi_{3xx}+\phi_{1x}\phi_{4xx})$$

$$+2(\phi_{4r}\phi_{1xr}+\phi_{3r}\phi_{2xr}+\phi_{2r}\phi_{3xr}+\phi_{1r}\phi_{4xr})$$

$$+(\gamma-1)\left\{\phi_{3x}\frac{1}{r}(r\phi_{2r})_r+\phi_{2x}\frac{1}{r}(r\phi_{3r})_r+\phi_{1x}\frac{1}{r}(r\phi_{4r})_r\right\}$$

$$+\frac{\gamma+1}{2}\left\{\phi_{1x}{}^2\phi_{3xx}+2\phi_{1x}\phi_{2x}\phi_{2xx}+(2\phi_{1x}\phi_{3x}+\phi_{2x}{}^2)\phi_{1xx}\right\}$$

$$+2\left\{\phi_{1x}\phi_{1r}\phi_{3xr}+(\phi_{2x}\phi_{1r}+\phi_{1x}\phi_{2r})\phi_{2xr}\right.$$

$$\left.+(\phi_{3x}\phi_{1r}+\phi_{2x}\phi_{2r}+\phi_{1x}\phi_{3r})\phi_{1xr}\right\}$$

$$+\frac{\gamma-1}{2}\left\{\phi_{1x}{}^2\frac{1}{r}(r\phi_{3r})_r+2\phi_{1x}\phi_{2x}\frac{1}{r}(r\phi_{2r})_r\right\}$$

$$+\frac{\gamma-1}{2}\left\{\phi_{1r}{}^2\phi_{3xx}+2\phi_{1r}\phi_{2r}\phi_{2xx}+(2\phi_{1r}\phi_{3r}+\phi_{2r}{}^2)\phi_{1xx}\right\}$$

$$+\frac{\gamma+1}{2}\left\{\phi_{1r}{}^2\frac{1}{r}(r\phi_{3r})_r+2\phi_{1r}\phi_{2r}\frac{1}{r}(r\phi_{2r})_r\right\}$$

$$-\frac{3}{r}(\phi_{1r}{}^2\phi_{3r}+\phi_{1r}\phi_{2r}{}^2)$$

ここで，（11）～（14）の導出に際して（9）が用いられた。

（7）の（5）と（6）への代入は境界条件および軸対称性条件に対して次を与える。

(15) $$E\phi_{1r}(x,\ r_w)+E^2\phi_{2r}(x,\ r_w)+E^3\phi_{3r}(x,\ r_w)+\cdots$$
$$=wf'(x)\{1+E\phi_{1x}(x,r_w)+E^2\phi_{2x}(x,r_w)+E^3\phi_{3x}(x,r_w)+\cdots\}$$

(16) $$\phi_{nr}(x,\ 0)=0 \quad (n\geqq 1)$$

3. 第一，第二オーダー外部解と非一様性

第一オーダー解は（9）を積分し，(16) で $n=1$ とおいた式を用いることにより直ちに得られ次を与える。

(17) $$\phi_1=h_1(x)$$

ここで，$h_1(x)$ は任意の積分関数である。

(10) で $n=2$ とおいた式および（17）を用いて評価された（11）により第二オーダー式は次で表される。

(18) $$\frac{1}{r}(r\phi_{2r})_r=(\gamma+1)h_1'h_1''$$

ここで，プライムは x での微分を意味する。

(18) は直ちに積分でき，(16) で $n=2$ とおいた式を用いるならば，第二オーダー解に対して次を得る。

(19) $$\phi_2=\frac{\gamma+1}{8}(h_1'^2)'r^2+h_2(x)$$

ここで，$h_2(x)$ は任意の積分関数である。

一方，(15) に $\phi_{1r}=0$ が代入され，$r=r_w$ で評価された各速度成分が $r=1$ のまわりでテーラー展開されるとき，ϕ_n $(n=2,\ 3,\ 4,\ 5)$ に対する次の境界条件を導く。

(20) $$w=E^2$$

(21a) $$\phi_{2r}(x,\ 1)=f'$$

(21b) $$\phi_{3r}(x,\ 1)=f'\phi_{1x}(x,\ 1)$$

(21c) $$\phi_{4r}(x,\ 1)=f'\phi_{2x}(x,\ 1)-f\phi_{2rr}(x,\ 1)$$

(21d) $$\phi_{5r}(x,\ 1)=f'\phi_{3x}(x,\ 1)-f\phi_{3rr}(x,\ 1)+f'f\phi_{1xr}(x,\ 1)$$

(19) の (21a) への代入は h_1' に対して次式を導く。

$$(22)\qquad h_1'=\pm\sqrt{\frac{4}{\gamma+1}(f+c_1)}$$

ここで，c_1 は任意の積分定数である。

そのとき，(22) を (19) へ代入するならば，ϕ_2 は次の如く書き換えられる。

$$(19)'\qquad \phi_2=\frac{1}{2}f'r^2+h_2(x)$$

$h_2'(x)$ は第三オーダー解が見出された後，ϕ_3 に対する境界条件が適用されるならば求められる。

第三オーダー式は (10) で $n=3$ とおいた式および (17) と (19)$'$ を用いて評価された (12) を用いて次で表される。

$$(23)\qquad \frac{1}{r}(r\phi_{3r})_r=\frac{\gamma+1}{2}(h_1'f'')'r^2+(\gamma+1)\left\{(h_1'h'_2)'+\frac{2\gamma-1}{6}(h_1'^3)'\right\}$$

また，ϕ_3 に対する境界条件は (17) の (21b) への代入により次で与えられる。

$$(24)\qquad \phi_{3r}(x,\ 1)=f'h_1'$$

(23) を積分し，(16) で $n=3$ とおいた式を用いるならば，第三オーダー解に対して次を得る。

$$(25)\qquad \phi_3=\frac{\gamma+1}{32}(h_1'f'')'r^4+\frac{\gamma+1}{4}\left\{(h_1'h_2')'+\frac{2\gamma-1}{6}(h_1'^3)'\right\}r^2$$
$$+h_3(x)$$

ここで，$h_3(x)$ は任意の積分関数である。

(25) の (24) への代入は h_2' 対して次式を導く。

$$(26)\qquad h_2'=-\frac{1}{4}f''+\frac{3-2\gamma}{6}h_1'^2+\frac{c_2}{h_1'}$$

ここで，c_2 は任意の積分定数である。

さて，外部領域のどこにおいても流速がほとんど音速であるような流れのうち，ここでは連続的な速度を伴ってスロート上流での亜音速流から下流での超音速流へ変化する流れが研究のために選ばれるであろう。そのような流れは (22) と (26) で $c_1=c_2=0$ と置き，さらに (22) で $x<0$ に対して下符号，$x>0$に対して上符号が取られるならば得られる。そのときu, vは次で表される。

$$
\text{(27a)}\qquad u=\begin{cases} 1-E\sqrt{\dfrac{4}{\gamma+1}f}+E^2\left\{\dfrac{1}{2}f''r^2-\dfrac{1}{4}f''+\dfrac{6-4\gamma}{3(\gamma+1)}f\right\}+\cdots & (x<0)\\ 1+E\sqrt{\dfrac{4}{\gamma+1}f}+E^2\left\{\dfrac{1}{2}f''r^2-\dfrac{1}{4}f''+\dfrac{6-4\gamma}{3(\gamma+1)}f\right\}+\cdots & (x>0)\end{cases}
$$

$$
\text{(27b)}\qquad v=E^2f'r+\cdots
$$

ところで，(27a) の第一摂動項と第二摂動項が比較されるならば，$x\to 0$ のとき $f\to 0$ であるが f'' はゼロではない。従って，第一摂動項は $x\to 0$ のとき第二摂動項のオーダーになるまで大きさにおいて小さくなることができる。このようにして，非一様性が存在する。これをさらに研究するために，2つの項が同じオーダーになるところに内部領域を導入することによりさらなる解析が引き続く節で行われる。

4．内部領域での定式化

内部領域での解析のために次で定義される新しい座標 x^* が導入される。

$$
\text{(28)}\qquad x=\delta^* x^*,\qquad x^*=O(1)
$$

ここで，$\delta^*<<1$ である。

x 座標のみが伸縮される。というのも，内部領域はきわめてうすいが r 方向に軸から壁まで広がっているからである。

内部領域での摂動ポテンシャル ϕ^* が次で定義されるとき，

$$
\text{(29)}\qquad u=\Phi_x=1+\phi^*{}_{x^*},\qquad v=\Phi_r=\delta^*\phi^*{}_r
$$

(1a)，(1b) は ϕ^* に対して次を与える。

$$
\begin{aligned}
\text{(30)}\qquad & \delta^*\frac{1}{r}(r\phi^*{}_r)_r\\
&=\frac{1}{\delta^*}(\gamma+1)\phi^*{}_{x^*}\phi^*{}_{x^*x^*}+\delta^*2\phi^*{}_r\phi^*{}_{x^*r}+\delta^*(\gamma-1)\phi^*{}_{x^*}\frac{1}{r}(r\phi^*{}_r)_r\\
&+\frac{1}{\delta^*}\frac{\gamma+1}{2}\phi^*{}_{x^*}{}^2\phi^*{}_{x^*x^*}+\delta^*2\phi^*{}_{x^*}\phi^*{}_r\phi^*{}_{x^*r}+\delta^*\frac{\gamma-1}{2}\phi^*{}_{x^*}{}^2\frac{1}{r}(r\phi^*{}_r)_r\\
&+\delta^*\frac{\gamma-1}{2}\phi^*{}_r{}^2\phi^*{}_{x^*x^*}+\delta^{*3}\frac{\gamma+1}{2}\phi^*{}_r{}^2\frac{1}{r}(r\phi^*{}_r)_r-\delta^{*3}\frac{1}{r}\phi^*{}_r{}^3
\end{aligned}
$$

外部展開（7）の場合と同様に，ϕ^* はこの内部領域で小パラメータ E^* によって次の如く漸近展開されるものと仮定する。

(31) $$\phi^*(x^*,\ r;\ E^*)=E^*\phi^*{}_1(x^*,\ r)+E^{*2}\phi^*{}_2(x^*,\ r)+\cdots$$

そのとき，u, v はそれぞれ，次で表される。

(32a) $$u=1+E^*\phi^*{}_{1x^*}+E^{*2}\phi^*{}_{2x^*}+\cdots$$

(32b) $$v=\delta^*\{E^*\phi^*{}_{1r}+E^{*2}\phi^*{}_{2r}+\cdots\}$$

内部領域では，$E\phi_{1x}$, $E^2\phi_{2x}$ そして $E^*\phi^*{}_{1x^*}$ は同オーダーであるので，$\phi^*{}_{1x^*}=O(1)$ より，次が成立する。

(33) $$E\phi_{1x}=O(E^*),\qquad E^2\phi_{2x}=O(E^*)$$

ところで，(19) あるいは (19)′ は $\phi_{2x}=\dfrac{\gamma+1}{4}(\phi_{1x}\phi_{1xx})_x\ r^2+h_2'$ と書き換えられる。この表式を用いるならば，$c_1=c_2=0$ のとき，ϕ_{2x} は $(\phi_{1x}\phi_{1xx})_x$ と同オーダーであると仮定することができる。すなわち，h_2' は $x\to0$ のとき，高々 $(\phi_{1x}\phi_{1xx})_x$ と同オーダーであると仮定できる。そのとき，(28) を用いるならば $x^*=O(1)$ に対して次を見出す。

(34) $$\phi_{2x}=O\left[\left(\frac{E^*}{E\delta^*}\right)^2\right]$$

さらに，(33) を用いるならば $\delta^{*2}=O(E^*)$ を得る。都合上，ここでは，

(35) $$\delta^{*2}=(\gamma+1)E^*$$

と置く。

(30) への (35) と (31) の代入は $\phi^*{}_n$ $(n\geqq1)$ に対する支配方程式を導くであろう。最初の 2 つは次で与えられる。

(36) $$\frac{1}{r}(r\phi^*{}_{1r})_r=\phi^*{}_{1x^*}\phi^*{}_{1x^*x^*}$$

(37) $$\frac{1}{r}(r\phi^*{}_{2r})_r=\phi^*{}_{1x^*}\phi^*{}_{2x^*x^*}+\phi^*{}_{2x^*}\phi^*{}_{1x^*x^*}+2\phi^*{}_{1r}\phi^*{}_{1x^*r}$$
$$+(\gamma-1)\phi^*{}_{1x^*}\frac{1}{r}(r\phi^*{}_{1r})_r+\frac{1}{2}\phi^*{}_{1x^*}{}^2\ \phi^*{}_{1x^*x^*}$$

(36) はよく知られた遷音速小擾乱方程式である。この式によって支配される

遷音速ノズル問題に対しては，１節でも述べたようにいくつかの既知の解（内部解）が存在する。次節では，スロート近傍で連続的な速度を伴った加速流を記述する既知の内部解と前節で得られた外部解との接合が試みられる。

5. 第一オーダー内部解と外部解の接合

この節では，友近と橋本によって見出された（36）に対する相似解[2)]が内部解として選ばれる。その解の導出をここで簡単に行っておこう。次の変換が（36）に代入されるならば，

$$(38)\qquad s^*=x^*+\mu r^2, \qquad \phi^*_{1x^*}=z(s^*)+4\mu^2r^2$$

z に対する次の支配方程式を得る。

$$(39)\qquad zz''+(z'-2\mu\omega_1)(z'-2\mu\omega_2)=0$$

ここで，μ は任意定数であり，$\omega_1=1+\sqrt{5}$，$\omega_2=1-\sqrt{5}$ である。そして，プライムは s^* に関しての微分を意味する。

（39）は次の解を持つように見出される。

$$(40)\qquad \{z-2\mu\omega_1(s^*+c)\}^{\omega_1}\{z-2\mu\omega_2(s^*+c)\}^{-\omega_2}=b$$

ここで，c, b は任意の積分定数である。

非回転条件より，ϕ^*_{1r} は次の如く見出される。

$$(41)\qquad \phi^*_{1r}=2\mu r(z+4\mu x^*+2\mu^2r^2+4\mu c)$$

さて，（40）は固定された c の値に対して，b＝一定値．が一本の解曲線を与えるように数値的に解かれるであろう。しかしながら，ここで考察される問題に対しては，$b=0$ の特別な場合を取り扱うことで十分である。そのとき，（40）は次を与える。

$$(42)\qquad z=2\mu\omega_i(s^*+c)$$

ここで，i は１あるいは２である。

（42）を（38）と（41）に代入し，（35）を（32）に適用するならば，第一オーダーまでで速度成分は次で与えられる。

$$(43a)\qquad u=1+E^*2\mu\omega_i\left\{\frac{1}{2}\mu\omega_i r^2+x^*+c\right\}+\cdots$$

(43b) $$v=E^{*\frac{3}{2}}\sqrt{\gamma+1}\ 2\mu^2 w_i^2 r\left\{\frac{1}{4}\mu\omega_i r^2+x^*+c\right\}+\cdots$$

ここで，i は 1 あるいは 2 である。そして，ここで考察される連続的な速度を伴う加速流に対して，μ は $i=1$ のとき $\mu>0$, $i=2$ のとき $\mu<0$ であるように取られる。

$x\to 0$ のとき，一様に有効ではない外部解がどのような条件のもとで成立するかを調べることは価値あることである。それは内部解 (43) と外部解 (27) との接合の可能性を調べることによりなされるであろう。接合は外部解に対して $|x|\to 0$ の極限において，そして内部解に対して $|x^*|\to\infty$ の極限においてなされる。

まず，$x<0$, $x^*<0$ での接合を考えよう。

$x<0$ に対する外部解の速度成分 (27) の第一，第二摂動項がそれぞれ，$x=0$ の近傍でテーラー展開され，2，3の展開項が残されるとき次を与える。

(44a) $$u=1-E\sqrt{\frac{4}{\gamma+1}}\left[\sqrt{f}\Big|_{x=0}+(\sqrt{f})'\Big|_{x=}x+\frac{1}{2}(\sqrt{f})''\Big|_{x=0}x^2+\cdots\right]$$
$$+E^2\left[\frac{1}{2}f''(0)\,r^2-\frac{1}{4}f''(0)+\frac{6-4\gamma}{3(\gamma+1)}f(0)\right.$$
$$\left.+\left\{\frac{1}{2}f'''(0)\,r^2-\frac{1}{4}f'''(0)+\frac{6-4\gamma}{3(\gamma+1)}f'(0)\right\}x+\cdots\right]$$
$$+\cdots$$

(44b) $$v=E^2\{f'(0)+f''(0)x+\cdots\}r+\cdots$$

$x^*<<-1$ で成立する内部解の速度成分 (43) が (28) と (35) を用いて外部変数で書き換えられるならば次を得る。

(45a) $$u=1+E^{*\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{4}{\gamma+1}}\mu\omega_i x+E^*2\mu\omega_i\left\{\frac{1}{2}\mu\omega_i r^2+c\right\}+\cdots$$

(45b) $$v=E^*2\mu^2\omega_i^2 rx+\cdots$$

(44) と (45) が項ごとに比較されるとき次を見出す。

(46a, b, c, d, e)

$$E^{*\frac{1}{2}}=E, \qquad f(0)=0, \qquad f'(0)=0$$

$$f''(0)=2\mu^2\omega_i^2, \qquad f''(0)=-8\mu\omega_i c$$

$x>0$, $x^*>0$ での外部解と内部解の接合の結果も (46) で示されたと全く同じ結果を生ずるように見出される。

(46b, c, d) は壁の形がスロート近傍で放物線でなければならないことを示している。(46d) と (46e) は定数 μ と c が $f''(0)$ と次の如く結び付いていることを示している。

$$\text{(47a, b)} \qquad \mu\omega_i=\sqrt{\frac{1}{2}f''(0)}, \qquad c=-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}f''(0)}$$

ここで，$i=1$ のとき $\mu>0$, $i=2$ のとき $\mu<0$ である。

(47b) はノズル軸上での音速点がスロートより下流の点になければならないことを示している。

いま，$f(x)=\alpha x^2$ (α は正の定数) とおくならば，$x\to 0$ のとき，(27a) は次の如く表される。

$$\text{(27a)}' \qquad u=1+E\sqrt{\frac{4\alpha}{\gamma+1}}x+E^2\left(\alpha r^2-\frac{1}{2}\alpha\right)+\cdots$$

ここで，(27a) の第二摂動項のうち，項 $\dfrac{6-4\gamma}{3(\gamma+1)}f$ は項 $\dfrac{1}{2}f''r^2-\dfrac{1}{4}f''$ に比較してずっと小さくなるので省略されている。(28), (35) そして (46a) を用いて， (27a)$'$ が内部変数によって書き換えられるならば次を得る。

$$\text{(27a)}'' \qquad u=1+E^*\left(\sqrt{4\alpha}x^*+\alpha r^2-\frac{1}{2}\alpha\right)+\cdots$$

一方，$f(x)=\alpha x^2$ でもって，(47) が (43a) に代入されるならば結果は (27a)$''$ と全く一致する。従って，壁の形がスロート近傍で放物線でありさえすれば，それ以外に壁の形について何等の制限なしに， 外部解 (27a)$'$ がスロート近傍の流れに対して正しい記述を与えることは明らかである。

次節では，陽に指定された壁の形でもって，連続的な速度を伴うスロート上流での亜音速流から下流での超音速流へ変化する流れに対して高次オーダー (第五オーダー) までの外部解が求められる。そして，接合の結果を用いるこ

とにより，第二オーダー内部解が第二オーダー内部方程式を解くことなしに系統的に導出できることが示される。

6. 外部解から第二オーダー内部解の導出

壁の形は，前節の接合の結果を踏まえて，

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2 \tag{48}$$

と置くことにより，$r_w=1+E^2\frac{1}{2}x^2$ で指定されるものとする。

外部解の第一，第二，そして第三オーダー速度成分はすでに3節で求められた結果を用いて得られるであろう。

第一オーダー速度成分は (17) と (22) より次で与えられる。

$$\phi_{1x}=h_1' \tag{49a}$$

$$\phi_{1r}=0 \tag{49b}$$

ここで，

$$h_1'=\sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}x \tag{49c}$$

である。この式は，$c_1=0$ と置かれた (22) に (48) が代入され，そして $x<0$ に対して下符号，$x>0$ に対して上符号が取られるならば得られる。

第二オーダー速度成分は (19)′，(26)，(48) そして (49c) を用いて得られ次である。

$$\phi_{2x}=\frac{1}{2}r^2+h_2' \tag{50a}$$

$$\phi_{2r}=xr \tag{50b}$$

ここで，

$$h_2'=-\frac{1}{4}+\frac{3-2\gamma}{3(\gamma+1)}x^2 \tag{50c}$$

であり，(26) で $c_2=0$ とおいて得られる式である。

第三オーダー速度成分は (25)，(48)，(49c) そして (50c) を用いて得られ次である。

(51a) $$\phi_{3x}=\sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}xr^2+h_3'$$

(51b) $$\phi_{3r}=\sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}\left(\frac{1}{4}r^3-\frac{1}{4}r+\frac{2}{\gamma+1}x^2r\right)$$

h_3' は第四オーダー解が見出され，ϕ_4 に対する境界条件が適用されるならば得られるであろう。

第四オーダー式は (10) で $n=4$ と置き，(49)，(50) そして (51) の (13) への代入により次の如く表される。

(52) $$\frac{1}{r}(r\phi_{4r})_r$$

$$=\frac{4\gamma+18}{3}xr^2-\frac{2}{3}\gamma x-\frac{4\gamma^2-36\gamma+18}{9(\gamma+1)}x^3+(\gamma+1)\sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}(xh_3')'$$

ϕ_4 に対する境界条件は (21c) への (48) と (50) の代入により次で与えられる。

(53) $$\phi_{4r}(x,1)=\frac{1}{4}x-\frac{7\gamma-3}{6(\gamma+1)}x^3$$

(52) が積分され，(16) で $n=3$ と置いた式が用いられるならば，ϕ_{4r} に対して次を得る。

(54) $$\phi_{4r}=\frac{2\gamma+9}{6}xr^3-\frac{\gamma}{3}xr-\frac{2\gamma^2-18\gamma+9}{9(\gamma+1)}x^3r$$

$$+\sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}(xh'_3)'r$$

(54) が (53) に代入され，h_3' が $x\to0$ のとき発散しないように見出されるならば h_3' に対して次式を得る。

(55) $$h_3'=\sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}\left\{-\frac{5}{8}x+\frac{4\gamma^2-57\gamma+27}{72(\gamma+1)}x^3\right\}$$

そのとき，(55) の (54) への代入は第四オーダー速度成分に対して次を与える。

(56a) $$\phi_{4x}=\frac{2\gamma+9}{24}r^4-\frac{4\gamma+15}{24}r^2-\frac{7\gamma-3}{4(\gamma+1)}x^2r^2+h_4'(x)$$

(56b) $$\phi_{4r}=\frac{2\gamma+9}{6}xr^3-\frac{4\gamma+15}{12}xr-\frac{7\gamma-3}{6(\gamma+1)}x^3r$$

ここで，$h_4(x)$ は任意の積分関数であり，第五オーダー解へ進むことにより決定されるであろう。

第五オーダー解は第四オーダー解を求めたと全く同様な方法により導出することができる。ここでは，そのようにして得られる $h_4'(x)$ と ϕ_{5r} の表式についてのみその結果を与えておこう。

$$h_4' = \frac{10\gamma+57}{288} + \frac{13\gamma-27}{24(\gamma+1)}x^2 + \frac{8\gamma^3+270\gamma^2-477\gamma+135}{540(\gamma+1)^2}x^4 \tag{56c}$$

$$\begin{aligned}\phi_{5r} = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}\Big\{&\frac{\gamma+3}{9}r^5 - \frac{20\gamma+63}{96}r^3 + \frac{28\gamma+93}{288}r \\ &+ \frac{52\gamma^2+51\gamma+327}{96(\gamma+1)}x^2r^3 - \frac{52\gamma^2+75\gamma+279}{96(\gamma+1)}x^2r \\ &+ \frac{4\gamma^2-93\gamma-9}{36(\gamma+1)^2}x^4r\Big\}\end{aligned} \tag{57}$$

さて，以上の結果より，外部速度成分 u は第四オーダーまでで (49a, c)，(50a, c)，(51a)，(55) そして (56a, c) を用いて次の如く書かれる。

$$\begin{aligned}u &= 1 + E\phi_{1x} + E^2\phi_{2x} + E^3\phi_{3x} + E^4\phi_{4x} + \cdots \\ &= 1 + E\sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}x \\ &\quad + E^2\left\{\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{4} + \frac{3-2\gamma}{3(\gamma+1)}x^2\right\} \\ &\quad + E^3\sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}\left\{xr^2 - \frac{5}{8}x + \frac{4\gamma^2-57\gamma+27}{72(\gamma+1)}x^3\right\} \\ &\quad + E^4\Big\{\frac{2\gamma+9}{24}r^4 - \frac{4\gamma+15}{24}r^2 + \frac{10\gamma+57}{288} - \frac{7\gamma-3}{4(\gamma+1)}x^2r^2 \\ &\qquad + \frac{13\gamma-27}{24(\gamma+1)}x^2 + \frac{8\gamma^3+270\gamma^2-477\gamma+135}{540(\gamma+1)^2}x^4\Big\} \\ &\quad + \cdots\end{aligned} \tag{58a}$$

一方，外部速度成分 v は第五オーダーまでで (49b)，(50b)，(51b)，(56b) そして (57) を用いて次の如く書かれる。

(58b) $$\upsilon=E\phi_{1r}+E^2\phi_{2r}+E^3\phi_{3r}+E^4\phi_{4r}+E^5\phi_{5r}+\cdots$$

$$=E^2xr$$

$$+E^3\sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}\left(\frac{1}{4}r^3-\frac{1}{4}r+\frac{2}{\gamma+1}x^2r\right)$$

$$+E^4\left\{\frac{2\gamma+9}{6}xr^3-\frac{4\gamma+15}{12}xr-\frac{7\gamma-3}{6(\gamma+1)}x^3r\right\}$$

$$+E^5\sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}\left\{\frac{\gamma+3}{9}r^5-\frac{20\gamma+63}{96}r^3+\frac{28\gamma+93}{288}r\right.$$

$$+\frac{52\gamma^2+51\gamma+327}{96(\gamma+1)}x^2r^3-\frac{52\gamma^2+57\gamma+279}{96(\gamma+1)}x^2r$$

$$\left.+\frac{4\gamma^2-93\gamma-9}{36(\gamma+1)^2}x^4r\right\}$$

$$+\cdots$$

(28), (35) そして接合によって得られた結果 (46a) を用いて (58a, b) が内部変数で書き換えられ，E の冪ごとにまとめられるならば u と v に対してそれぞれ，次を得る。

(59a) $$u=1+E^2\left(\frac{1}{2}r^2-\frac{1}{4}+\sqrt{2}\,x^*\right)$$

$$+E^4\left(\frac{2\gamma+9}{24}r^4-\frac{4\gamma+15}{24}r^2+\frac{10\gamma+57}{288}+\sqrt{2}\,x^*r^2\right.$$

$$\left.-\frac{5}{8}\sqrt{2}\,x^*+\frac{3-2\gamma}{3}x^{*2}\right)$$

$$+O(E^6)$$

(59b) $$\upsilon=\sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}\left\{E^3\left(\frac{1}{4}r^3-\frac{1}{4}r+\sqrt{2}\,x^*r\right)\right.$$

$$+E^5\left(\frac{\gamma+3}{9}r^5-\frac{20\gamma+63}{96}r^3+\frac{28\gamma+93}{288}r\right.$$

$$\left.+\frac{2\gamma+9}{6}\sqrt{2}\,x^*r^3-\frac{4\gamma+15}{12}\sqrt{2}\,x^*r+2x^{*2}r\right)$$

$$\left.+O(E^7)\right\}$$

ところで，(32) に (35) と (46a)が代入されるとき，内部速度成分は次の如く E を用いた展開形に書き換えられるであろう。

(60a) $$u=1+E^2\phi^*_{1x^*}+E^4\phi^*_{2x^*}+\cdots$$

(60b) $$v=\sqrt{\gamma+1}(E^3\phi^*_{1r}+E^5\phi^*_{2r}+\cdots)$$

そこで，(59) と (60) が比較されるならば，第一，第二オーダーの内部速度成分は，それぞれ次の如く見出される。

(61a) $$\phi^*_{1x^*}=\frac{1}{2}r^2-\frac{1}{4}+\sqrt{2}\,x^*$$

(61b) $$\phi^*_{1r}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{4}r^3-\frac{1}{4}r+\sqrt{2}\,x^*r\right)$$

そして，

(62a) $$\phi^*_{2x^*}=\frac{2\gamma+9}{24}r^4-\frac{4\gamma+15}{24}r^2+\frac{10\gamma+57}{288}+\sqrt{2}\,x^*r^2-\frac{5}{8}\sqrt{2}\,x^*+\frac{3-2\gamma}{3}x^{*2}$$

(62b) $$\phi^*_{2r}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\gamma+3}{9}r^5-\frac{20\gamma+63}{96}r^3+\frac{28\gamma+93}{288}r+\frac{2\gamma+9}{6}\sqrt{2}\,x^*r^3-\frac{4\gamma+15}{12}\sqrt{2}\,x^*r+2x^{*2}r\right)$$

(61) は，(43) に (46a)，(47a, b) そして (48) を代入して得られる式の第一摂動速度成分と，もちろん，一致することが確かめられる。従って，(61) は (36) を満たしている。また，(62) が (37) を満たすことも容易に確かめられる。

ところで，(35) で $\delta^*=\frac{\gamma+1}{2}E^*$ と置かれるならば，結果として，(61)，(62) は次の如く書き換えられるであろう。

(61a)′ $$\phi^*_{1x^*}=\frac{1}{2}r^2-\frac{1}{4}+x^*$$

(61b)′ $$\phi^*_{1r}=\frac{1}{4}r^3-\frac{1}{4}r+x^*r$$

そして，

$$\phi^*_{2x^*}=\frac{2\gamma+9}{24}r^4-\frac{4\gamma+15}{24}r^2+\frac{10\gamma+57}{288}+x^*r^2-\frac{5}{8}x^*+\frac{3-2\gamma}{6}x^{*2} \tag{62a$'$}$$

$$\phi^*_{2r}=\frac{\gamma+3}{9}r^5-\frac{20\gamma+63}{96}r^3+\frac{28\gamma+93}{288}r+\frac{2\gamma+9}{6}x^*r^3-\frac{4\gamma+15}{12}x^*r+x^{*2}r \tag{62b$'$}$$

これらの表式は，全く同様の問題に対して幾分違った方法で Hall によって得られた結果〔(73)，(74)，(77)，(78)〕[3)]と，$\phi^*_{nx^*}(n=1,\ 2)$ を $u_n(n=1,\ 2)$ で，$\phi^*_{nr}(n=1,\ 2)$ を $v_n(n=1,2)$ で，そして r を y, x^* を z で置き換えることを除けば完全に一致する。

引用文献

1) S. Tomotika and K. Tamada, Quart. Appl. Math. **7** (1950) 381-397.
2) S. Tomotika and Z. Hasimoto, J. Math. Phys. **29** (1950) 105-117.
3) I. M. Hall, Quart. Journ. Mech. and Applied Math. **15** (1962) 487-508.
4) A. Szaniawski, Arch. Mech. Stos. **17** (1965) 79-85.
5) T. C. Adamson, Jr., A. F. Messiter, and G. K. Richey, Arch. Mech. Stos. **24** (1974) 617-628.